Théorie des graphes pour l'analyse de réseaux d'intéractions

Bertrand Jouve

Laboratoire ERIC - IXXI - Université Lyon 2

SMAI 2013

Plan

1. Introduction
2. Décomposition en Clans
   - Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens
3. Réduction de graphe par épluchage de sommets
   - Exemple d'étude : dynamique de parcellaires
4. Conclusion

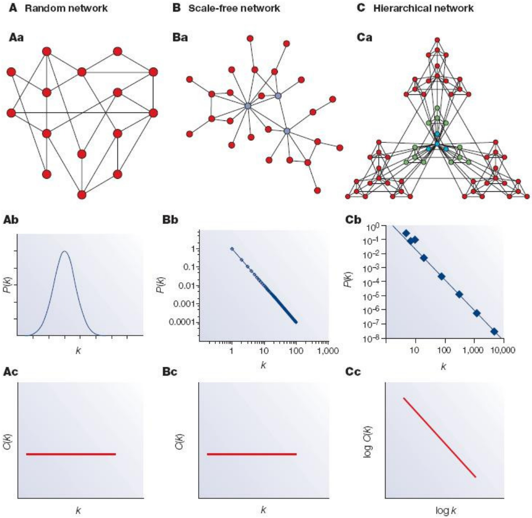
La démarche générale

- Enrichir l'ensemble des outils mathématiques (graphe +...) qui permettent l'étude des réseaux réels.
- Tentative de mener conjointement les approches données-centrée et mathématique-centrée.
- Les deux exemples présentés participent d'une démarche essentiellement descriptive et non prédictive.

Les exemples

- Décomposition en clan et communautés.
- s-homotopie et épluchage.

et la différence par rapport à l'analyse 'classique' des grands réseaux ...



Notion de communautés

La notion de 'communauté' apparaît souvent centrale car elle permet une schématisation du réseau et donc une approche à un autre niveau de granulométrie. Pour autant elle n'admet pas de définition unique. Si l'on ne regarde que la structure du graphe, les définitions suivantes correspondent à des notions combinatoires bien étudiées :

- Une communauté est un ensemble d'individus 'fortement' reliés entre eux,
- Les sommets d'une même communauté sont vus de la même manière par un individu extérieur à la communauté,
- Tous les éléments d'une communauté se connaissent 2 à 2,
- Deux sommets d'une communauté sont 'interchangeables'.
- ...

Décomposition en clans

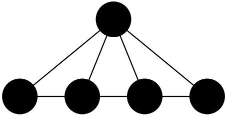
G est un graphe ou, plus généralement, une 2-structure.

Définition

Un *Clan* (*ie.* Intervalle) I de G est un sous-ensemble de sommets de G tel que : $\forall i, j \in I, \forall x \in V(G) - I, i \sim x \iff j \sim x$.

Plusieurs résultats sur la décomposition en clans, en particulier l'étude et la caractérisation des graphes qui n'admettent que des clans triviaux ou encore qui sont critiques pour cette propriété (Schmerl, J.H., Trotter, W.T., 1993 ; Boudabbous Y., Ille, P. 2009). Nous regardons une famille un peu plus large constituée des graphes sans 2-clans et critiques.

Remarque :

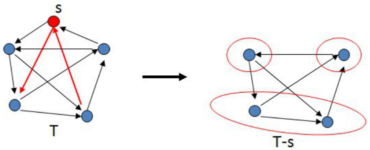


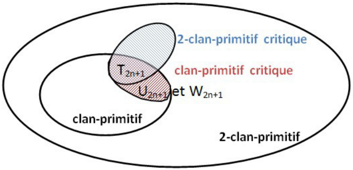
Exemple de graphe contenant un 4-clan mais pas de 2-clan.

Tout à commencé sur les tournois ... Soit T est un tournoi.

Définition

- Un *Clan* (*ie.* Intervalle) I de T est un sous-ensemble de sommets de T tel que tout sommet qui n'est pas dans I soit domine soit est dominé par tous les sommets de T.
- Un *2-Clan* est un clan à 2 éléments.
- Un tournoi sans 2-clan est *sommet-critique* lorsque la suppression d'un sommet quelconque crée un 2-clan.





Question : Caractériser les tournois sans 2-clans et sommet-critiques.

Etat de l'art

étudiés Tournois dont les clans sont triviaux [Schmerl and Trotter, 1993 ; Ille, 1997]

caractérisés Parmi ces tournois, ceux qui sont sommet-critiques pour cette propriété [Ille, 1997]

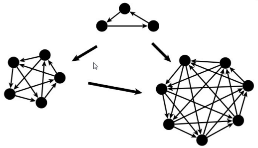
étudiés Les tournois dont une partition en ordres totaux admet r sous-ensembles et sommet-critiques pour cette propriété [Neumann-Lara, 1984]

Résultats [2005 ; 2010]

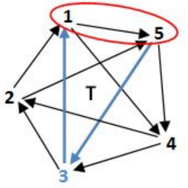
caractérisés Tournois sans 2-clans (*ie.* tous les clans acycliques sont triviaux) et sommets critiques pour cette propriété : $T'[\overrightarrow{C_{k_1}}, \overrightarrow{C_{k_2}}, ..., \overrightarrow{C_{k_p}}]$ (somme lexicographique) où C_{k_i} est le tournoi circulant à $2k_i + 1$ sommets ($k_i \in \mathbb{N}^*$).

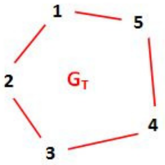
Exemple :

$O_3[\overrightarrow{C_3}, \overrightarrow{C_5}, \overrightarrow{C_7}] =$



■ Idée de la preuve :





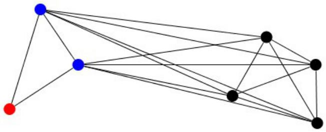
$$3 \sim \{1, 5\}$$

- Tout sommet admet une paire associée et celle-ci est unique.
- Les composantes connexes de G_T sont des cycles C_{2k+1}, ce qui correspond à des sous-tournois circulants de T.

Remarque :
Les questions et résultats de décomposabilité et d'indécomposabilité en clans et 2-clans pour les tournois s'étendent aux 2-structures (2013 soumis)

Définition

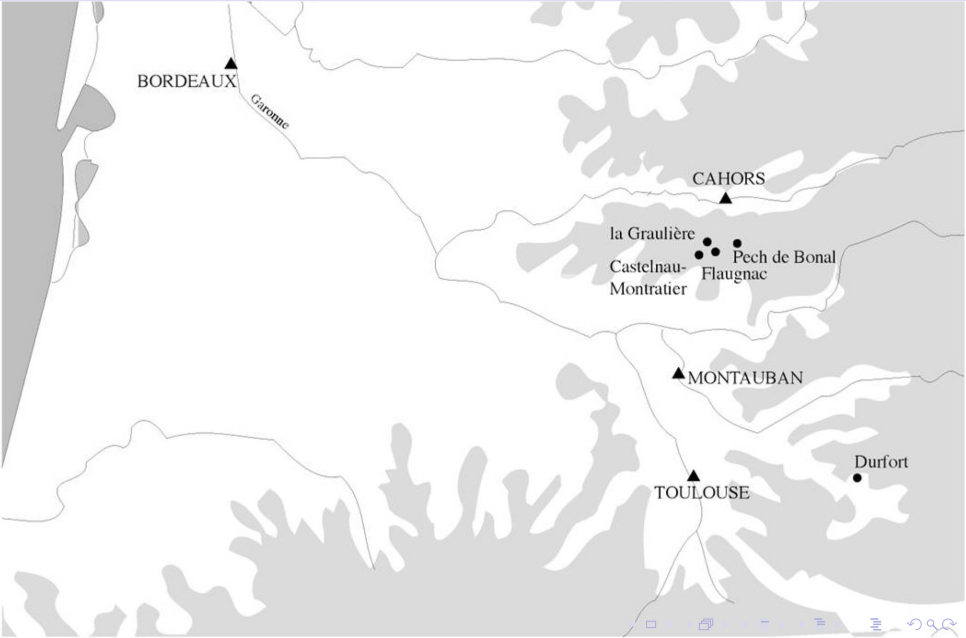
Une communauté parfaite d'un graphe G est un sous-graphe complet de G qui est un clan de G.



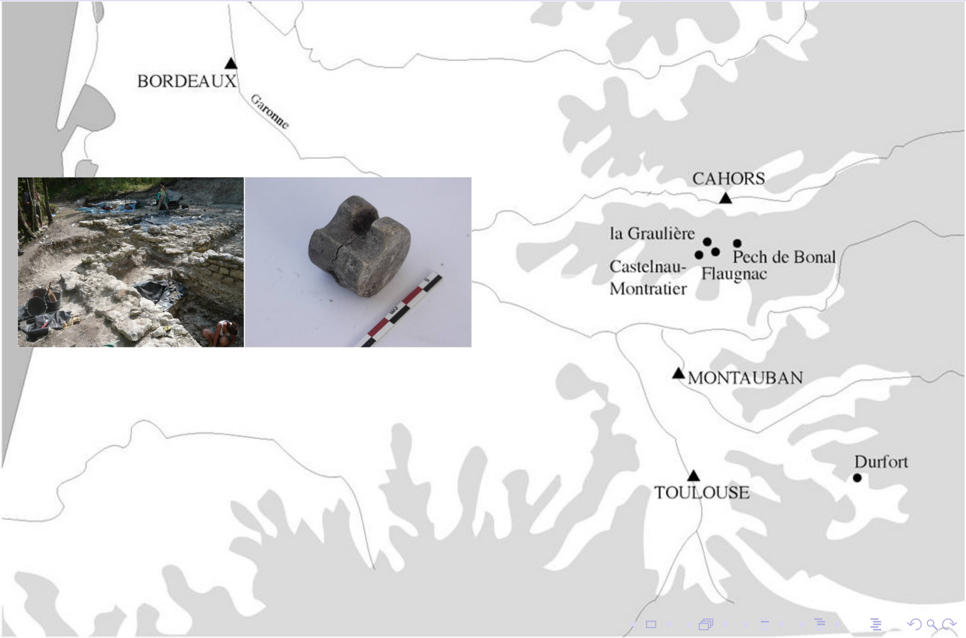
Résultat [Van den Heuvel and Pejic 2001]

Si le laplacien L du graphe a une valeur propre λ non nulle de multiplicité au moins $k-1$ dont les vecteurs propres associés possèdent exactement les mêmes k coordonnées non nulles alors ces k coordonnées correspondent soit aux sommets d'une k-communauté parfaite soit aux sommets d'un k-ensemble stable.

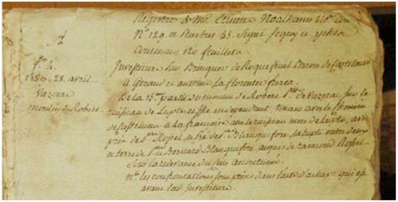
Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens



Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens



Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens



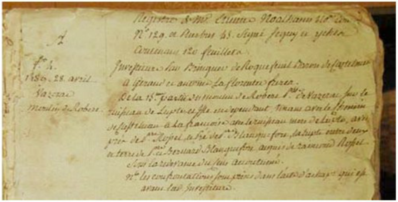
Investiture par Bringuier de Roquefeuil baron de Castelnau à Géraud et Antoine LaFlorentie frères de la 15ème partie du moulin de Robert paroisse de Vazerac sur le ruisseau de la Lupte et isle en dépendant tenant avec le chemin de Castelnau à la Française avec le ruisseau mere de Lupte, avec près de Pierre Rossel et pré de Pierre Blanquefort, la Lupte entre deux et terre de Pierre et Bernard Blanquefort acquis de Raimond Rossel sous la redevance de cens accoutumé.

Extrait du registre M. Etienne Noalhanis notaire. Registre AD 46 48 J 3, Page 1, 28/04/1489, Investiture, Paroisse de Vazerac.

Hypothèse :

Les données de noms et de lieux présentes dans l'ensemble de ces contrats permettent l'émergence de réseaux de relations qui sont descriptifs de l'organisation de la société.

Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens



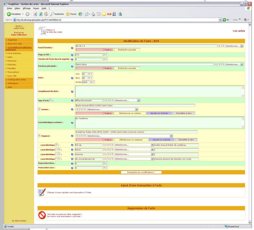
Investiture par Bringuier de Roquefeuil baron de Castelnau à Géraud et Antoine LaFlorentie frères de la 15ème partie du moulin de Robert paroisse de Vazerac sur le ruisseau de la Lupte et isle en dépendant tenant avec le chemin de Castelnau à la Française avec le ruisseau mere de Lupte, avec près de Pierre Rossel et pré de Pierre Blanquefort, la Lupte entre deux et terre de Pierre et Bernard Blanquefort acquis de Raimond Rossel sous la redevance de cens accoutumé.

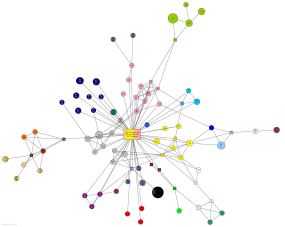
Extrait du registre M. Etienne Noalhanis notaire. Registre AD 46 48 J 3, Page 1, 28/04/1489, Inves/ture, Paroisse de Vazerac.

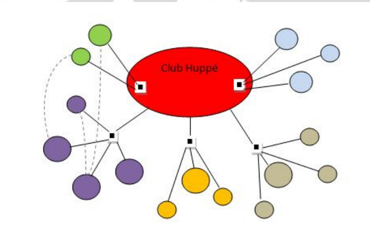
Questions :

1. Identifier les réseaux sociaux dans le monde paysan des XIIIe-XVIe siècles.
2. Hiérarchiser les individus et leur rôle au sein de ces réseaux.
3. Analyser l'évolution de ces réseaux (passage de la guerre de cent ans.

Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens



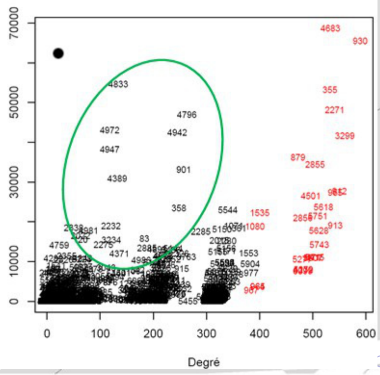




Outils et résultats

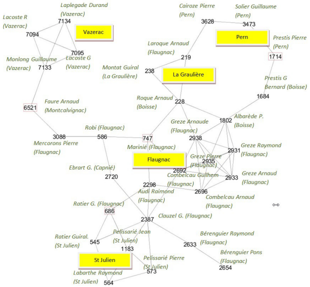
BDD de contrats agraires (1250-1350 et 1450-1550) : 8706 individus et 11591 arêtes

- Mise en forme des données, définition des liens pour la construction des réseaux.
- Structure en communautés parfaites, club huppé et 'individus relais'.
- Comparaison des graphes à différentes périodes.



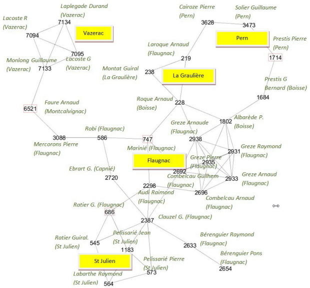
Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens

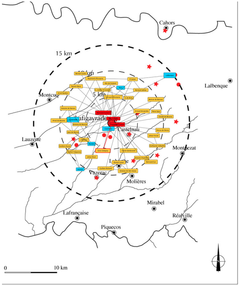
Travaux en cours : dynamique et spatialisation

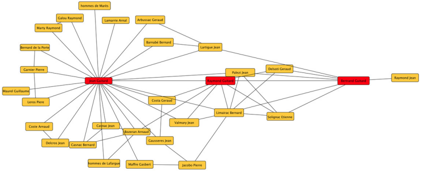


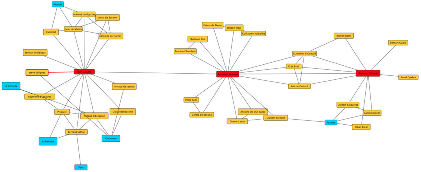
Exemple d'étude : modélisation de réseaux sociaux anciens

Travaux en cours : dynamique et spatialisation









Réduction de graphe par démontabilité

Notion d'homotopie en topologie : deux objets sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue de l'objet sur lui-même.

non homotope à

Problème : dans quel mesure peut-on étudier la 'forme' d'un graphe en utilisant des outils de topologie comme l'homotopie ?

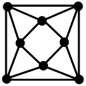
Il existe un lien 'assez classique' entre les graphes et la topologie par le biais des complexes simpliciaux.

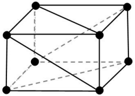
Rappel : Un complexe simplicial K, d'ensemble de sommets V, est une collection d'ensembles non vides de V (les simplexes) telle que : $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ et si $(\sigma \in K, x \in \sigma)$ alors $\sigma \setminus \{x\} \in K$.

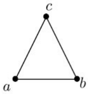
Définition

- $\Delta(G)$ est le complexe simplicial dont les k-simplexes sont les sous-graphes complets à k sommets.
- Une réduction élémentaire de $\Delta(G)$ est la suppression d'une paire de simplexes (σ, τ) avec τ face propre maximale de σ et τ libre (*ie.* face d'aucun autre simplexe).
- Deux complexes simpliciaux sont le même type d'homologie simple si l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'ajouts et de réductions élémentaires.

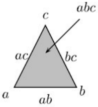
Exemple :







K_3



$\Delta_{\mathcal{G}}(K_3)$

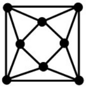
Il existe un lien 'assez classique' entre les graphes et la topologie par le biais des complexes simpliciaux.

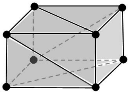
Rappel : Un complexe simplicial K, d'ensemble de sommets V, est une collection d'ensembles non vides de V (les simplexes) telle que : $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ et si $(\sigma \in K, x \in \sigma)$ alors $\sigma \setminus \{x\} \in K$.

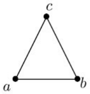
Définition

- $\Delta(G)$ est le complexe simplicial dont les k-simplexes sont les sous-graphes complets à k sommets.
- Une réduction élémentaire de $\Delta(G)$ est la suppression d'une paire de simplexes (σ, τ) avec τ face propre maximale de σ et τ libre (*ie.* face d'aucun autre simplexe).
- Deux complexes simpliciaux sont le même type d'homologie simple si l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'ajouts et de réductions élémentaires.

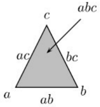
Exemple :







K_3



$\Delta_{\mathcal{G}}(K_3)$

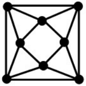
Il existe un lien 'assez classique' entre les graphes et la topologie par le biais des complexes simpliciaux.

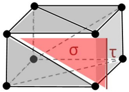
Rappel : Un complexe simplicial K, d'ensemble de sommets V, est une collection d'ensembles non vides de V (les simplexes) telle que : $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ et si $(\sigma \in K, x \in \sigma)$ alors $\sigma \setminus \{x\} \in K$.

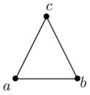
Définition

- $\Delta(G)$ est le complexe simplicial dont les k-simplexes sont les sous-graphes complets à k sommets.
- Une réduction élémentaire de $\Delta(G)$ est la suppression d'une paire de simplexes (σ, τ) avec τ face propre maximale de σ et τ libre (*ie.* face d'aucun autre simplexe).
- Deux complexes simpliciaux sont le même type d'homologie simple si l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'ajouts et de réductions élémentaires.

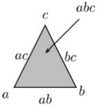
Exemple :







K_3



$\Delta_{\mathcal{G}}(K_3)$

Il existe un lien 'assez classique' entre les graphes et la topologie par le biais des complexes simpliciaux.

Rappel : Un complexe simplicial K, d'ensemble de sommets V, est une collection d'ensembles non vides de V (les simplexes) telle que : $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ et si $(\sigma \in K, x \in \sigma)$ alors $\sigma \setminus \{x\} \in K$.

Définition

- $\Delta(G)$ est le complexe simplicial dont les k-simplexes sont les sous-graphes complets à k sommets.
- Une réduction élémentaire de $\Delta(G)$ est la suppression d'une paire de simplexes (σ, τ) avec τ face propre maximale de σ et τ libre (*ie.* face d'aucun autre simplexe).
- Deux complexes simpliciaux sont le même type d'homologie simple si l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession d'ajouts et de réductions élémentaires.

Question : peut-on construire une homotopie combinatoire sur les graphes identifiable à l'homotopie simple sur les complexes simpliciaux, qui procède par élimination de sommets ?

Sommet simplicial

Le voisinage fermé de i dans G est l'ensemble $V_G[i] = V_g(i) \cup \{i\}$.

Définition

- Un sommet i est simplicial si $V_G[i]$ est complet.
- Un graphe G est démontable par sommets simpliciaux s'il existe un ordre $1, 2, \cdots, n$ de ses sommets tel que i est simplicial dans $G - \{1, 2, \cdots, i-1\}$.

Proposition [Dirac, 1961]

Un graphe fini G est triangulé (ou cordé) ssi G est démontable par sommets simpliciaux.

Exemple :

Sommet simplicial

Le voisinage fermé de i dans G est l'ensemble $V_G[i] = V_g(i) \cup \{i\}$.

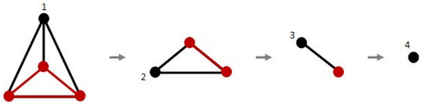
Définition

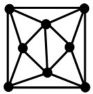
- Un sommet i est simplicial si $V_G[i]$ est complet.
- Un graphe G est démontable par sommets simpliciaux s'il existe un ordre $1, 2, \cdots, n$ de ses sommets tel que i est simplicial dans $G - \{1, 2, \cdots, i-1\}$.

Proposition [Dirac, 1961]

Un graphe fini G est triangulé (ou cordé) ssi G est démontable par sommets simpliciaux.

Exemple :



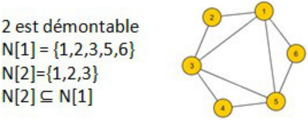


Sommet démontable

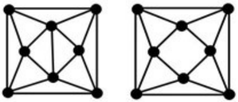
Définition [Quillot, 1983 ; Nowakowski and Winkler, 1983]

- Un sommet i est démontable s'il existe j tel que $V_G[i] \subseteq V_G[j]$.
- Un graphe G est démontable s'il existe un ordre $1, 2, \cdots, n$ de ses sommets tel que i est démontable dans $G - \{1, 2, \cdots, i-1\}$.

Exemple :



Graphe démontable



Aucun sommet n'est démontable

Remarque : un sommet simplicial est démontable.

Proposition [Quillot, 1983 ; Nowakowski and Winkler, 1983]

Un graphe fini G est policier-gagnant ssi G est démontable.

Remarque : faux dans le cas infini (cf. arbre).

Sommet démontable

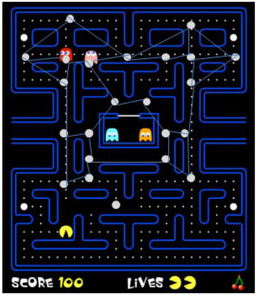
DIGRESSION

Lien entre démontabilité et jeu « gendarmes – voleur »

Etant donné un graphe G, un gendarme et un voleur.

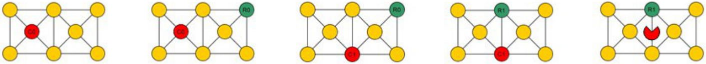
Le gendarme commence le jeu en se mettant sur un sommet de G puis le voleur fait de même. Ils se déplacent ensuite alternativement, où **un déplacement correspond à suivre une arête du graphe ou rester sur place** (*i.e.* aller sur un sommet voisin ou rester sur place). Chacun connaît la position de l'autre. **Le gendarme gagne lorsque, en un nombre fini de tours, il occupe la même place que le voleur.**

Un graphe G est gendarme-gagnant lorsqu'il existe une stratégie pour que le gendarme gagne.



Théorème : Un graphe est policier gagnant si et seulement s'il est démontable.

Exemple

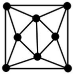


Sommet s-démontable

Définition [2008]

- Un sommet i est s-démontable si $V_G(i)$ est démontable.
- Un graphe G est s-démontable s'il existe un ordre $1, 2, \cdots, n$ de ses sommets tel que i est démontable dans $G - \{1, 2, \cdots, i-1\}$.

Exemple : ni sommet simplicial, ni sommet démontable.

 $\overset{s}{\searrow} \bullet$

Remarque : simplicial $\Rightarrow$ démontable $\Rightarrow$ s-démontable

Définition [2010]

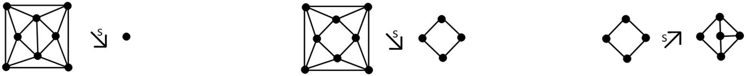
On dira que G et H ont le même type de s-homotopie s'il existe $G = J_1, J_2, \cdots, J_{k-1}, J_k = H$ tels que $G = J_1 \xrightarrow{s} J_2 \xrightarrow{s} \ldots \xrightarrow{s} J_{k-1} \xrightarrow{s} J_k = H$ où $\xrightarrow{s}$ représente l'addition ou la suppression d'un sommet s-démontable.

Sommet s-démontable

Définition [2008]

- Un sommet i est s-démontable si $V_G(i)$ est démontable.
- Un graphe G est s-démontable s'il existe un ordre $1, 2, \cdots, n$ de ses sommets tel que i est démontable dans $G - \{1, 2, \cdots, i-1\}$.

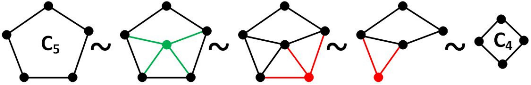
Exemple : ni sommet simplicial, ni sommet démontable.



Remarque : simplicial $\Rightarrow$ démontable $\Rightarrow$ s-démontable

Définition [2010]

On dira que G et H ont le même type de s-homotopie s'il existe $G = J_1, J_2, \cdots, J_{k-1}, J_k = H$ tels que $G = J_1 \xrightarrow{s} J_2 \xrightarrow{s} \ldots \xrightarrow{s} J_{k-1} \xrightarrow{s} J_k = H$ où $\xrightarrow{s}$ représente l'addition ou la suppression d'un sommet s-démontable.



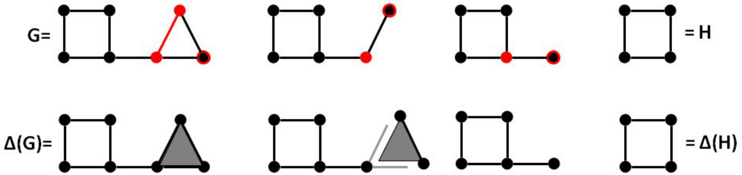
Sommet s-démontable

Résultat [2008, 2010]

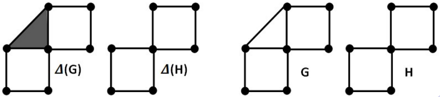
$G \searrow_s H \Rightarrow \Delta(G) \searrow_s \Delta(H)$.

■ Idée de la preuve : Soit g s-démontable, $\Delta(G \setminus g) = \Delta(G) \setminus \mathrm{star}_{\Delta(G)}(< g >)$ où $\mathrm{star}_K(\sigma)$ est l'ensemble des simplexes de K contenant σ.

Exemple :



L'implication inverse est fausse :



Sommet s-démontable

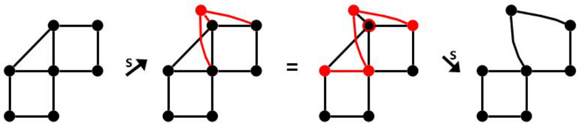
Définition

Deux complexes simpliciaux ont même type d'homotopie simple si l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession de réductions et d'expansions élémentaires.

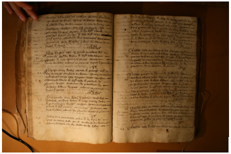
Résultat [BFJ 2010]

$[G]_s = [H]_s \Leftrightarrow [\Delta(G)]_s = [\Delta(H)]_s$

Exemple :



Exemple d'étude : dynamique de parcellaires


. . .

. . .


Extrait d'un compoix AC Castelnau-Montratier (46), compoix de 1598, vol 1, fol 6 v°

Jehan de Bouviers tient un jardin au dessous du Taluc, paroisse de Castelnau, confront d'une part chemin tendant du dit Taluc à Sainte Quitterie, d'autre part à chemin tendant de Castelnau à Molières passant par la portanelle, d'autre part à jardin de Raymond Pons chirurgien contenant 3 quartons 1/4

Item un près à la Rivière de Lupte paroisse du dit Castelnau confront du chef a terre de Maître Mathieu Vielhevigne, d'un coté à terre et pré de Josué de Lobradou, du fonds avec le dessuge de la dite rivière, d'autre côté a pred de Guillaume Clary contenant 2 quartons 2/4

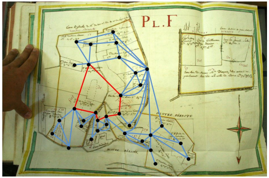
Question :

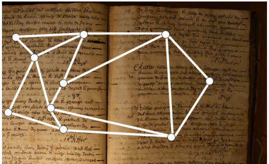
1. Quelle lecture des paysages disparus donnent les compoix ?
2. Comment comparer des documents cartographiés et non cartographiés pour étudier la dynamique de parcellaires sur une longue période ?

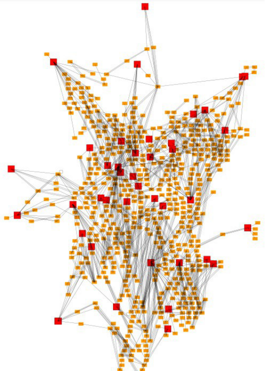
Exemple d'étude : dynamique de parcellaires

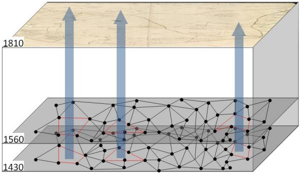
Outils et résultats

- Comparer les graphes duaux de parcellaires
- Caler ces graphes sur des invariants connus









Conclusion

- Difficulté à se positionner dans le domaine de la 'combinatoire appliquée' à cause de la rigidité de certains concepts.
- Comment la théorie des graphes peut s'accorder avec une 'science des réseaux' qui doit traiter de la dynamique et du multiplexage ?

Quelques problèmes mathématiques :

1. Quels sont les graphes 2-cop win ? 1-cop win avec un jeu sans boucles ?
2. Caractériser les graphes s-démontables ? Tous les graphes s-démontables peuvent-ils être s-étendus sur un K_n ?
3. ...