

FIG. 1 – Une réalisation de percolation sur \mathbb{T} , le réseau triangulaire en deux dimensions (chaque site étant représenté par un hexagone). Les sites colorés forment une composante connexe.

Percolation presque-critique en deux dimensions, et quelques modèles liés (Pierre Nolin, Courant Institute of Mathematical Sciences)

Ce travail a pour but principal d'étudier des modèles deux-dimensionnels introduits en physique statistique pour décrire les formes « aléatoires » apparaissant dans divers contextes : diffusion de particules, corrosion d'un métal, érosion d'une côte marine... De manière remarquable, on voit surgir pour ces modèles des propriétés universelles, indépendantes du mécanisme particulier (physique, chimique ou autre) à l'œuvre. Les dimensions fractales $4/3$ et $7/4$ sont ainsi fréquemment observées, dans des situations totalement différentes.

Ces modèles partagent une propriété d'auto-criticalité, et peuvent être décrits par comparaison avec un modèle de milieu aléatoire bien connu en physique statistique, la *percolation*. La percolation par sites sur un réseau \mathbb{L} , par exemple \mathbb{Z}^d ou le réseau triangulaire \mathbb{T} en deux dimensions, peut être décrite comme suit. Pour chaque site x de \mathbb{L} , on lance une pièce (biaisée) pour déterminer s'il est occupé (noir) ou vacant (blanc) : pour un certain paramètre p entre 0 et 1, x est occupé avec probabilité p et vacant avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres sites.

On s'intéresse ensuite aux propriétés de connexité de l'ensemble des sites occupés : deux sites occupés x et y sont dits connectés, ce que l'on note $x \rightsquigarrow y$, s'il existe un chemin de x à y sur le réseau composé uniquement de sites occupés. Les sites occupés peuvent ainsi être regroupés en composantes connexes (maximales), appelées « clusters » (Figure 1). On dit qu'un site x est connecté à ∞ s'il appartient à un cluster infini, et on définit

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \infty),$$

la probabilité que l'origine soit dans un cluster infini. Cette fonction θ peut aussi être vue comme la densité du(des) cluster(s) infini(s).

Une propriété importante de la percolation est l'existence d'une *transition de phase* : si on introduit le paramètre critique

$$p_c(\mathbb{L}) = \sup\{p \text{ t.q. } \theta(p) = 0\},$$

on peut montrer que $0 < p_c(\mathbb{L}) < 1$ sous certaines hypothèses sur \mathbb{L} , satisfaites par les réseaux usuels tels que \mathbb{Z}^d ou \mathbb{T} . Ainsi,

- Lorsque $p < p_c$, il n'y a (presque sûrement) aucun cluster infini : c'est ce qu'on appelle le régime *sous-critique* (Figure 2(a)).

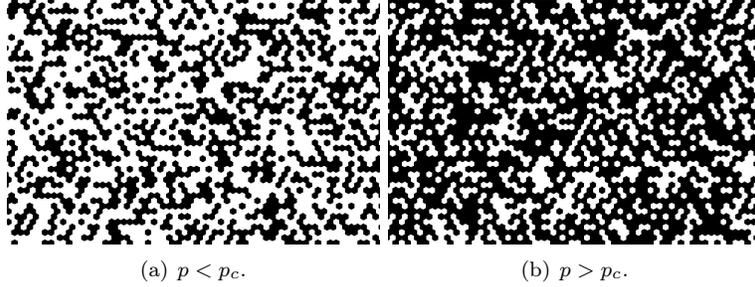


FIG. 2 – Réalisations de percolation en régimes sous-critique ($p < p_c$) et sur-critique ($p > p_c$).

– Lorsque $p > p_c$, il y a (presque sûrement) un cluster infini, qui se trouve être unique : c’est le régime *sur-critique* (Figure 2(b)).

Ces deux régimes sont relativement « prévisibles » à large échelle, mais entre eux se trouve un régime très intéressant : le régime *critique*, lorsque $p = p_c$. Déterminer s’il existe ou non un cluster infini en régime critique peut s’avérer très difficile : dans le cas de \mathbb{T} on sait qu’il n’y en a pas (presque sûrement), mais c’est encore une question ouverte pour \mathbb{Z}^3 par exemple.

Dans le cas du réseau triangulaire \mathbb{T} en deux dimensions, H. Kesten a prouvé en 1980 que $p_c = 1/2$. Récemment, une description très précise de la percolation au point critique (i.e. pour cette valeur $p = 1/2$) a été obtenue, en combinant deux ingrédients principaux. D’une part, l’introduction puis l’étude des processus SLE¹ par G. Lawler, O. Schramm et W. Werner a permis de décrire la loi des interfaces à la limite d’échelle². Mais pour cela, une propriété d’invariance conforme, prédite en physique statistique, était supposée établie. D’autre part, cette propriété d’invariance conforme a été effectivement prouvée par S. Smirnov dans le cas de \mathbb{T}^3 .

Cette description, combinée à certains résultats de renormalisation établis par H. Kesten, permet ensuite d’étudier la percolation près du point critique en deux dimensions. On peut notamment obtenir de cette manière les exposants critiques, qui décrivent le comportement près du point critique des principales fonctions caractéristiques. On peut ainsi prouver que la densité θ de la composante connexe infinie vérifie $\theta(p) = (p - 1/2)^{5/36+o(1)}$ lorsque $p \rightarrow 1/2^+$, tandis que pour la longueur caractéristique ξ , qui elle décrit la taille typique des clusters finis, on a $\xi(p) = |p - 1/2|^{-4/3+o(1)}$ lorsque $p \rightarrow 1/2$.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à différentes questions liées à la percolation près du point critique. Tout d’abord, partant de la description de la percolation critique que nous venons de mentionner, nous présentons en détail les techniques développées par H. Kesten permettant de relier la percolation près du point critique à la percolation critique. Nous montrons aussi comment certains de ces résultats peuvent être obtenus dans des situations plus générales, et obtenons quelques nouvelles conséquences.

Nous exploitons alors ces idées dans différentes situations. Nous étudions ainsi un modèle proposé par J.T. Chayes, L. Chayes et R. Durrett de cluster infini « naissant », pour lequel on force la présence d’un cluster infini au point critique. Nous établissons certaines lois de puissance pour ce modèle, ainsi que l’existence d’une transition fine entre percolation et non-percolation.

Nous nous intéressons ensuite aux propriétés géométriques des interfaces (les bords de clusters) en régime « presque-critique », à proximité du point critique. Les limites d’échelle potentielles sont d’un intérêt particulier : celles-ci ne sont pas conformément invariantes comme en régime critique, mais il est tout de même tentant d’essayer de les relier au processus SLE_6 , qui décrit les limites d’échelle en régime critique. Nous montrons qu’elles possèdent les mêmes exposants et dimensions que le SLE_6 , mais s’en distinguent par une propriété d’asymétrie locale, à chaque échelle (elles ont tendance à « tourner plus d’un côté que de l’autre »).

¹pour Schramm-Loewner Evolution.

²C’est-à-dire lorsqu’on prend une limite continue, en se plaçant de plus en plus loin pour regarder le modèle.

³Et uniquement dans ce cas : ainsi dans la plupart des résultats qui suivent, on se limite en fait à ce réseau particulier.

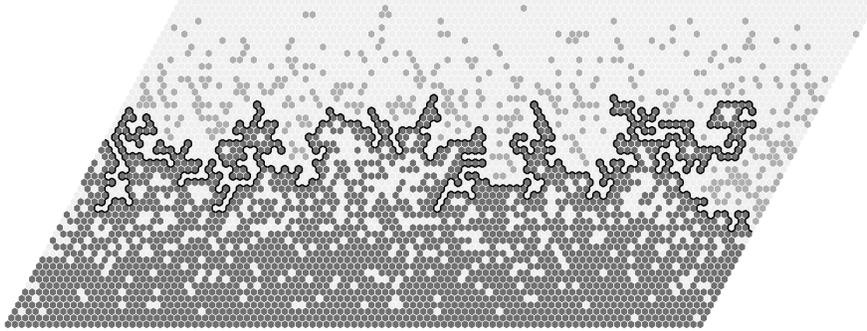


FIG. 3 – Pour la percolation en gradient, le paramètre d’occupation varie selon l’ordonnée, de $p = 1$ en bas à $p = 0$ en haut.

Nous décrivons ensuite des modèles auto-critiques où la transition de phase de la percolation apparaît spontanément. Nous évoquons tout d’abord la *percolation en gradient* : ce modèle de milieu inhomogène consiste en un processus de percolation où le paramètre d’occupation n’est plus constant, mais varie en fonction d’une des coordonnées (voir Figure 3). Il a été introduit en 1985 par les physiciens J.F. Gouyet, M. Rosso et B. Sapoval pour montrer numériquement la fractalité des fronts de diffusion : la percolation en gradient, pour laquelle on suppose indépendants les statuts des différents sites, est une approximation d’un modèle plus complexe de diffusion (cela revient à négliger les corrélations entre sites). Une interface macroscopique apparaît, séparant sites occupés et sites vacants. Nous montrons que cette interface reste localisée dans des zones où la densité de sites occupés est proche du paramètre critique p_c , et que son comportement est très proche de celui d’une interface en régime presque-critique.

Les résultats obtenus pour la percolation en gradient nous permettent ensuite, en conclusion, d’étudier un modèle deux-dimensionnel similaire au modèle de diffusion introduit initialement par J.F. Gouyet, M. Rosso et B. Sapoval. Ce modèle consiste à laisser diffuser indépendamment un grand nombre de particules partant toutes d’un site donné (Figure 4). Comme les particules évoluent, un gradient de concentration apparaît et l’on observe une interface macroscopique. Il est possible pour ce modèle de contrôler les corrélations entre sites, et l’interface peut-être décrite par comparaison locale avec une percolation en gradient. En particulier, nous mettons en évidence un régime dans lequel l’interface est fractale de dimension $7/4$, avec un bord extérieur de dimension $4/3$: une géométrie fractale apparaît donc spontanément (Figure 5). Ce modèle fournit ainsi une explication mathématique à l’apparition d’exposants « universels » tels que $7/4$ et $4/3$, comme observé en physique statistique. De plus, notre étude montre que même si ces exposants sont les mêmes qu’en régime critique, c’est tout un régime presque-critique que l’on observe, plutôt que le régime critique exactement. En effet, les interfaces partagent certaines propriétés avec les interfaces en régime critique, mais s’en distinguent par d’autres aspects : *stricto sensu* elles ne se trouvent pas dans la même classe d’universalité que les interfaces critiques.

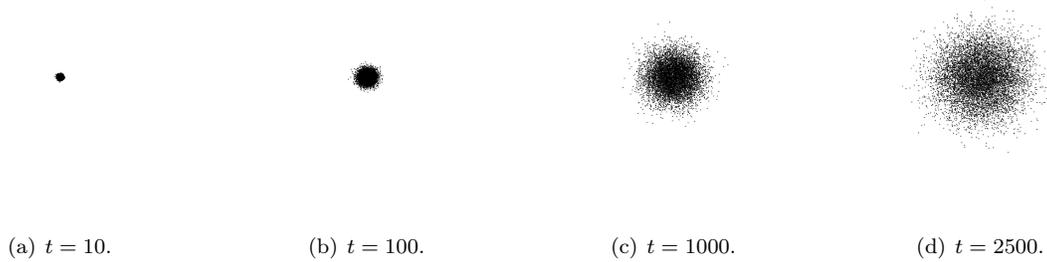


FIG. 4 – Évolution d'un système de $n = 10000$ particules, après t étapes.

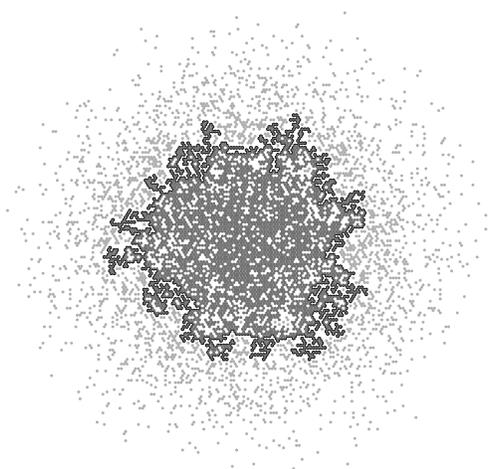


FIG. 5 – Une interface fractale de dimension $7/4$ apparaît spontanément.