

Comment la fiabilité prévisionnelle a influencé mes travaux en probabilités, et réciproquement

Christiane Coccozza-Thivent

Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR CNRS 8050)

christiane.coccozza@univ-mlv.fr

- Des arbres de défaillance
- aux processus semi-régénératifs à sauts

en passant par les processus de renouvellement markovien

en voulant

- démontrer des résultats bien connus,
- justifier des pratiques, des approximations,
- modéliser pour calculer.

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régénératifs à sauts (SRPJ)

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régénératifs à sauts (SRPJ)

Problème

On considère un matériel formé de composants.

On connaît :

- les caractéristiques de sûreté de fonctionnement des composants (par exemple les taux de défaillance et de réparation, ou la disponibilité, ...),
- la structure du système (série, parallèle, redondance k sur n , ...),
- les politiques de maintenance,
- les interactions.

On veut calculer des indicateurs de sûreté de fonctionnement du matériel.

Indicateurs

Disponibilité : probabilité que le matériel fonctionne à l'instant t

Fiabilité : probabilité que le matériel fonctionne sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$

Indicateurs

L'évolution temporelle du matériel est décrite par un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ cad-lag à valeurs dans E .

La structure du système est décrite par une partition $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ de E où :

- \mathcal{M} est l'ensemble des états de marche,
- \mathcal{P} est l'ensemble des états de panne.

Disponibilité : probabilité que le matériel fonctionne à l'instant t

$$D(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}).$$

Fiabilité : probabilité que le matériel fonctionne sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$

$$R(t) = \mathbb{P}(X_s \in \mathcal{M} \forall s \leq t)$$

Indicateurs

L'évolution temporelle du matériel est décrite par un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ cad-lag à valeurs dans E .

La structure du système est décrite par une partition $(\mathcal{M}, \mathcal{P})$ de E où :

- \mathcal{M} est l'ensemble des états de marche,
- \mathcal{P} est l'ensemble des états de panne.

Disponibilité : probabilité que le matériel fonctionne à l'instant t

$$D(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}).$$

Fiabilité : probabilité que le matériel fonctionne sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$

$$R(t) = \mathbb{P}(X_s \in \mathcal{M} \forall s \leq t) = \mathbb{P}(T > t).$$

T : premier instant de panne ou première durée de fonctionnement sans défaillance.

Indicateurs

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = \bar{F}(t),$$

\bar{F} : fonction de survie associée à T .

Indicateurs

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = \bar{F}(t),$$

\bar{F} : fonction de survie associée à T .

Si la loi de T a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds},$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad \text{taux de défaillance,}$$

Indicateurs

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = \bar{F}(t),$$

\bar{F} : fonction de survie associée à T .

Si la loi de T a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds},$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad \text{taux de défaillance,}$$

$$\mathbb{P}(T \in]t, t + \Delta] / T > t) = \lambda(t) \Delta + o(\Delta).$$

Indicateurs

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = \bar{F}(t),$$

\bar{F} : fonction de survie associée à T .

Si la loi de T a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds},$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \quad \text{taux de défaillance,}$$

$$\mathbb{P}(T \in]t, t + \Delta] / T > t) = \lambda(t) \Delta + o(\Delta).$$

MTTF : Mean Time To Failure

$$\text{MTTF} = \mathbb{E}(T).$$

Indicateurs : grandeurs asymptotiques

Disponibilité asymptotique :

$$D(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} D(t).$$

Taux de défaillance asymptotique :

$$\lambda(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t).$$

Lorsque les limites ci-dessus n'existent pas (maintenances périodiques), on peut considérer les limites au sens de Cesaro, par exemple :

$$D(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t D(s) ds.$$

Mais dans la suite de l'exposé, sauf avis contraire, les limites considérées seront des limites au sens classique.

Indicateurs : grandeurs asymptotiques



MUT : Mean Up Time

$$\text{MUT} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_n)$$

MDT : Mean Down Time

$$\text{MDT} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(P_n)$$

MTBF : Mean Time Between Failure

$$\text{MTBF} = \text{MUT} + \text{MDT}$$

Indicateurs : grandeurs asymptotiques



Cas particulier : processus de renouvellement alterné

- toutes les durées sont indépendantes,
- toutes les durées de fonctionnement ont même loi,
- toutes les durées de réparation ont même loi

$$\text{MUT} = \text{MTTF}.$$

Indicateurs : grandeurs asymptotiques



Cas particulier : processus de renouvellement alterné

- toutes les durées sont indépendantes,
- toutes les durées de fonctionnement ont même loi,
- toutes les durées de réparation ont même loi

En général, dans le cas d'un système qui n'est pas "purent série" ou "purent parallèle" avec taux constants, **on n'a pas un processus de renouvellement alterné** : ni indépendance, ni même loi.

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régénératifs à sauts (SRPJ)

Quantification avec les arbres de défaillances

Les arbres de défaillance sont des représentations graphiques des combinaisons des pannes des composants qui entraînent la panne du matériel.

Quantification avec les arbres de défaillances

Les arbres de défaillance sont des représentations graphiques des combinaisons des pannes des composants qui entraînent la panne du matériel.

Ce sont des **représentations statiques** :

le matériel est en panne à l'instant t si et seulement si à l'instant t

- ou les composants C_{i_1}, C_{i_2}, \dots sont en panne,
- ou les composants $C_{j_1}, C_{j_2}, C_{j_3}, \dots$ sont en panne,
- ...

Quantification avec les arbres de défaillances

Les arbres de défaillance sont des représentations graphiques des combinaisons des pannes des composants qui entraînent la panne du matériel.

Ce sont des **représentations statiques** :

le matériel est en panne à l'instant t si et seulement si à l'instant t

- ou les composants C_{i_1}, C_{i_2}, \dots sont en panne,
- ou les composants $C_{j_1}, C_{j_2}, C_{j_3}, \dots$ sont en panne,
- ...

Les arbres de défaillance permettent de **traiter de grands systèmes** avec des centaines de composants.

Quantification avec les arbres de défaillances

Pour des résultats quantitatifs exacts, il faut des composants indépendants.

La quantité de base calculée est l'indisponibilité du système

$$\bar{D}(t) = 1 - D(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{P})$$

Quantification avec les arbres de défaillances

Pour des résultats quantitatifs exacts, il faut des composants indépendants.

La quantité de base calculée est l'indisponibilité du système

$$\bar{D}(t) = 1 - D(t) = \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{P})$$

Avec des calculs "de type indisponibilité", on obtient aussi

$$m'_P(t) \quad \text{et} \quad \text{MTBF} = \frac{1}{m'_P(\infty)},$$

$m_P(t)$: nombre moyen de pannes du système sur $[0, t]$

d'où le **MUT** en utilisant "la formule bien connue" :

$$D(\infty) = \frac{\text{MUT}}{\text{MTBF}}.$$

Référence : documentation du logiciel PHAMISS

Quantification avec les arbres de défaillances

Article : S.M. ROSS. On the calculation of asymptotics system reliability characteristics. *Reliability and Fault Tree Analysis*. Eds R.E. Barlow, J.B. Fussell and N. Singpurwalla, SIAM, Philadelphia, 1975.

Dans le cas de taux de défaillance constants, la démonstration utilise le théorème de renouvellement.

Pour le cas général, Ross mentionne la méthode des phases "toute loi sur \mathbb{R}_+ est **limite** de lois qui peuvent être vues comme les durées de fonctionnement de systèmes de type série-parallèle avec composants indépendants et taux constants"

Quantification avec les arbres de défaillances

Article : S.M. ROSS. On the calculation of asymptotic system reliability characteristics. *Reliability and Fault Tree Analysis*. Eds R.E. Barlow, J.B. Fussell and N. Singpurwalla, SIAM, Philadelphia, 1975.

Dans le cas de taux de défaillance constants, la démonstration utilise le théorème de renouvellement.

Pour le cas général, Ross mentionne la méthode des phases et invoque un passage à la limite ... un peu rapide !

A suivre ...

Quantification avec les arbres de défaillances

Et la fiabilité ?

Pas de calcul exact car on n'a pas de description temporelle dynamique.

Quantification avec les arbres de défaillances

Et la fiabilité ?

Pas de calcul exact car on n'a pas de description temporelle dynamique.

Vesely a proposé en 1970 de remplacer

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \mathbb{P}(T \in]t, t + \Delta] / T > t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \mathbb{P}(X_{t+\Delta} \in \mathcal{P} / \forall s \leq t X_s \in \mathcal{M})\end{aligned}$$

par

$$\lambda_V(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \mathbb{P}(X_{t+\Delta} \in \mathcal{P} / X_t \in \mathcal{M}),$$

et la fiabilité

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}$$

par

$$R_V(t) = e^{-\int_0^t \lambda_V(s) ds}$$

Quantification avec les arbres de défaillances

Le taux de Vesely se calcule bien :

$$\lambda_V(t) = \frac{m'_P(t)}{D(t)}$$

Quantification avec les arbres de défaillances

Le taux de Vesely se calcule bien :

$$\lambda_V(t) = \frac{m'_P(t)}{D(t)}$$

Expérimentalement $\lambda_V(t)$ est une bonne approximation de $\lambda(t)$:

- pour t petit ... c'est "naturel" !
- pour t grand dans le cas de systèmes fiables, **pourquoi ?**

A-t-on une approximation pessimiste ?

Quantification avec les arbres de défaillances

Si on ne veut pas faire d'intégration numérique, pour "t pas trop petit", on peut remplacer

$$\int_0^t \lambda_V(s) ds \quad \text{par} \quad \lambda_V(\infty) t$$

et donc $R_V(t) = e^{-\int_0^t \lambda_V(s) ds}$ par :

$$R_{V\infty}(t) = e^{-\lambda_V(\infty)t}$$

d'autant plus que pour un système NBU, on a : $R(t) \geq e^{-\lambda(\infty)t}$.

Un système est NBU (New Better Than Used) si pour tous s et t :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T - s > t / T > s) &\leq \mathbb{P}(T > t) \\ \iff e^{-\int_0^t \lambda(s+u) du} &\leq e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \end{aligned}$$

propriété plus faible que λ croissant.

Quantification avec les arbres de défaillances

Si on ne veut pas faire d'intégration numérique, pour "t pas trop petit", on peut remplacer

$$\int_0^t \lambda_V(s) ds \quad \text{par} \quad \lambda_V(\infty) t$$

et donc $R_V(t) = e^{-\int_0^t \lambda_V(s) ds}$ par :

$$R_{V\infty}(t) = e^{-\lambda_V(\infty)t} = \text{"Ross"} e^{-t/\text{MUT}} \quad (\text{approximation ingénieur})$$

d'autant plus que pour un système NBU, on a : $R(t) \geq e^{-\lambda(\infty)t}$.

Un système est NBU (New Better Than Used) si pour tous s et t :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T - s > t / T > s) &\leq \mathbb{P}(T > t) \\ \iff e^{-\int_0^t \lambda(s+u) du} &\leq e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \end{aligned}$$

propriété plus faible que λ croissant.

Quantification avec les arbres de défaillances

Rappel des questions posées :

- lien entre $\lambda(\infty)$ et $\lambda_V(\infty)$?
- comment démontrer proprement $D(\infty) = \text{MUT}/\text{MTBF}$?

Quantification avec les processus markoviens de sauts

Lorsque le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ qui décrit l'évolution de l'état du système est **un processus de Markov à espace d'états fini**, la modélisation

- **a une dynamique temporelle,**
- **permet de représenter les dépendances** entre les composants, par exemple :
 - ▶ redondance passive (avec refus de démarrage à la sollicitation),
 - ▶ mode commun (létalement ou non létalement) de défaillance,
 - ▶ nombre limité de réparateurs avec un ordre de priorité pour les réparations (dans le cas "FIFO", il faut "éclater" des états),
 - ▶ ...
- **nécessite des taux constants.**

Quantification avec les processus markoviens de sauts

On sait en théorie tout calculer par des formules matricielles,
mais ...

explosion combinatoire

au delà de quelques dizaines de composants.

Quantification avec les processus markoviens de sauts

On sait en théorie tout calculer par des formules matricielles, mais ...

explosion combinatoire

au delà de quelques dizaines de composants.

La méthode des phases pour compenser le **problème des taux constants** n'est pas appropriée.

Quantification avec les processus markoviens de sauts

On sait en théorie tout calculer par des formules matricielles, mais ...

explosion combinatoire

au delà de quelques dizaines de composants.

La méthode des phases pour compenser le **problème des taux constants** n'est pas appropriée.

Dans les processus semi-markoviens, les durées de séjour dans les états n'ont pas des taux constants mais si $(Z_{1,t})_{t \geq 0}$ et $(Z_{2,t})_{t \geq 0}$ sont deux processus semi-markoviens indépendants, $(Z_{1,t}, Z_{2,t})_{t \geq 0}$ n'en est pas un.

Quantification avec les processus markoviens de sauts

On sait en théorie tout calculer par des formules matricielles, mais ...

explosion combinatoire

au delà de quelques dizaines de composants.

La méthode des phases pour compenser le **problème des taux constants** n'est pas appropriée.

On vérifie par calcul matriciel que, sous des hypothèses raisonnables :

$$D(\infty) = \frac{MUT}{MTBF}.$$

Quantification avec les processus markoviens de sauts

Taux de défaillance asymptotique :

On note $\gamma(i)$ le taux de transition de i à \mathcal{P} . On a :

$$\lambda(\infty) = \sum_{i \in \mathcal{M}} \gamma(i) \tilde{\pi}(i),$$

$\tilde{\pi}$: loi quasi-stationnaire relativement à \mathcal{M} :

$$\forall i \in \mathcal{M} \quad \tilde{\pi}(i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = i / \forall s \leq t X_s \in \mathcal{M}),$$

Quantification avec les processus markoviens de sauts

Taux de défaillance asymptotique :

On note $\gamma(i)$ le taux de transition de i à \mathcal{P} . On a :

$$\lambda(\infty) = \sum_{i \in \mathcal{M}} \gamma(i) \tilde{\pi}(i),$$

$\tilde{\pi}$: loi quasi-stationnaire relativement à \mathcal{M} :

$$\forall i \in \mathcal{M} \quad \tilde{\pi}(i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_t = i / \forall s \leq t X_s \in \mathcal{M}),$$

Taux de Vesely asymptotique :

$$\lambda_V(\infty) = \frac{1}{MUT} = \sum_{i \in \mathcal{M}} \gamma(i) \frac{\pi(i)}{\pi(\mathcal{M})}$$

π loi stationnaire.

Quantification avec les processus markoviens de sauts

Explication du fait que $\lambda_V(\infty)$ soit proche de $\lambda(\infty)$ pour des systèmes fiables

- Heuristique à partir des formules précédentes :
A. PAGES, M. GONDRAN : *Fiabilité des systèmes*.
Collection de la Direction des Etudes et Recherches
d'Electricité de France, Eyrolles, 1979.
- Techniques de couplage :
C. COCOZZA-THIVENT, M. ROUSSIGNOL : Comparaison
des lois stationnaire et quasi-stationnaire d'un processus de
Markov et application à la fiabilité. *Séminaire de Probabilités
XXX, Lecture Notes in Mathematics 1626, Springer, 24-39,
1996.*

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régénératifs à sauts (SRPJ)

Approximation du taux de défaillance

Une approche par les processus décomposables régénératifs (avec V. Kalashnikov)

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est décomposable sur \mathcal{M} s'il existe un processus $(X_t^0)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathcal{M} et une fonction positive γ définie sur \mathcal{M} telle que :

$$\mathbb{E}(h(X_s, s \leq t) 1_{\{T > t\}}) = \mathbb{E}\left(h(X_s^0, s \leq t) e^{-\int_0^t \gamma(X_s^0) ds}\right),$$

$$T = \inf\{t \geq 0, X_t \notin \mathcal{M}\}.$$

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas d'un processus décomposable :

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{E} \left(e^{-\int_0^t \gamma(X_s^0) ds} \right).$$

On en déduit :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \geq e^{-\int_0^t \lambda_0(s) ds}, \quad \lambda_0(s) = \mathbb{E}(\gamma(X_s^0))$$

et sous réserve d'existence des quantités considérées
(éventuellement des limites en moyennes de Césaro)

$$\lambda(\infty) \leq \lambda_0(\infty)$$

et

$$\lambda(\infty) = \int \gamma d\tilde{\pi}$$

$\tilde{\pi}$: **mesure quasi-stationnaire**. Cette dernière formule généralise les résultats sur les processus markoviens de sauts.

Approximation du taux de défaillance

Condition suffisante pour l'existence de $\lambda(\infty)$ et $\lambda_0(\infty)$: le processus $(X_t^0)_{t \geq 0}$ est régénératif (au sens strict) et des conditions de moments.

Un processus est régénératif (au sens strict) s'il existe un processus de renouvellement $(S_n)_{n \geq 1}$ tel que pour tout n , la loi du processus regardé à partir de l'instant S_n , est indépendante du passé et ne dépend pas de n .

Outils de démonstration : équations et théorème de renouvellement.

Approximation du taux de défaillance

Condition suffisante pour l'existence de $\lambda(\infty)$ et $\lambda_0(\infty)$: le processus $(X_t^0)_{t \geq 0}$ est régénératif (au sens strict) et des conditions de moments.

Un processus est régénératif (au sens strict) s'il existe un processus de renouvellement $(S_n)_{n \geq 1}$ tel que pour tout n , la loi du processus regardé à partir de l'instant S_n , est indépendante du passé et ne dépend pas de n .

Outils de démonstration : équations et théorème de renouvellement.

Quel est le lien entre λ_0 et le taux de Vesely λ_V ?

Approximation du taux de défaillance

Si le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est ergodique :

$$\lambda_V(\infty) = \int_{\mathcal{M}} \gamma \frac{d\pi}{\pi(\mathcal{M})}$$

π loi stationnaire de X .

Si le processus est décomposable et si $X^0 = (X_t^0)_{t \geq 0}$ est régénératif :

$$\lambda_0(\infty) = \int_{\mathcal{M}} \gamma d\pi_0$$

π_0 : loi stationnaire de X^0 ,

et (sous des conditions de moments) :

$$\lambda(\infty) = \int_{\mathcal{M}} \gamma d\tilde{\pi}$$

$\tilde{\pi}$: loi quasi-stationnaire de X relativement à \mathcal{M} .

Approximation du taux de défaillance

Cas d'un système formé de n composants indépendants de taux de défaillance et de réparation non nécessairement constants.

On utilise la **méthode des variables complémentaires** : pour chaque composant C_k , on ajoute la durée v_k écoulée depuis son dernier changement d'état. On obtient un processus de Markov à valeurs dans $(\{0, 1\} \times \mathbb{R}_+)^n$.

On démontre que ce processus est décomposable,

et γ est le taux de la méthode des états de marche critique

Approximation du taux de défaillance

Cas d'un système formé de n composants indépendants de taux de défaillance et de réparation non nécessairement constants.

On utilise la **méthode des variables complémentaires** : pour chaque composant C_k , on ajoute la durée v_k écoulée depuis son dernier changement d'état. On obtient un processus de Markov à valeurs dans $(\{0, 1\} \times \mathbb{R}_+)^n$.

On démontre que **ce processus est décomposable**,
donc **si** X^0 est régénératif :

$$\lambda(\infty) \leq \lambda_0(\infty), \quad \lambda_0(\infty) = \int_{\mathcal{M}} \gamma \, d\pi_0, \quad \lambda_V(\infty) = \int_{\mathcal{M}} \gamma \frac{d\pi}{\pi(\mathcal{M})}.$$

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas de composants indépendants

Le processus X^0 est-il régénératif ?

Quel est le rapport entre π_0 et $\pi/\pi(\mathcal{M})$?

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas de composants indépendants

Le processus X^0 est-il régénératif ?

Quel est le rapport entre π_0 et $\pi/\pi(\mathcal{M})$?

Si les taux de défaillance sont constants et si le système est cohérent, alors $\pi_0 = \pi/\pi(\mathcal{M})$.

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas de composants indépendants

Le processus X^0 est-il régénératif ?

Lorsque les taux de défaillance sont constants, l'état de marche parfaite (tous les composants sont en marche) est un état de régénération.

Quel est le rapport entre π_0 et $\pi/\pi(\mathcal{M})$?

Si les taux de défaillance sont constants et si le système est cohérent, alors $\pi_0 = \pi/\pi(\mathcal{M})$.

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas de composants indépendants

Le processus X^0 est-il régénératif ?

Lorsque les taux de défaillance sont constants, l'état de marche parfaite (tous les composants sont en marche) est un état de régénération.

Quel est le rapport entre π_0 et $\pi/\pi(\mathcal{M})$?

Si les taux de défaillance sont constants et si le système est cohérent, alors $\pi_0 = \pi/\pi(\mathcal{M})$.

Si les taux de défaillance sont constants et si le système est cohérent, alors

$$\lambda(\infty) \leq \lambda_0(\infty) = \lambda_V(\infty).$$

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas de composants indépendants

L'hypothèse "taux de défaillance constants" est-elle purement technique ? **NON**

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas de composants indépendants

L'hypothèse "taux de défaillance constants" est-elle purement technique ? NON

Dans le cas de taux de défaillance constants, λ_V donne-t-il une approximation pessimiste de la fiabilité ? en général NON

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas de composants indépendants

L'hypothèse "taux de défaillance constants" est-elle purement technique ? NON

Dans le cas de taux de défaillance constants, λ_V donne-t-il une approximation pessimiste de la fiabilité ? en général NON

On a $R(t) \geq e^{-\int_0^t \lambda_0(s) ds}$, a-t-on $R(t) \geq e^{-\lambda_0(\infty)t}$? en général NON ... mais si le système est NBU

$$R(t) \geq e^{-\lambda(\infty)t} \geq e^{-\lambda_0(\infty)t}$$

Approximation du taux de défaillance

Le système formé de composants indépendants est-il NBU ?

Approximation du taux de défaillance

Le système formé de composants indépendants est-il NBU ?
oui si les taux de défaillance sont constants et les taux de réparation décroissants.

R.E. BARLOW et F. PROSCHAN. Theory for Maintained Systems :
Distribution of Time to First Failure. *Mathematics of Operations
Research*, **1**, 32–42, 1976.

Pour un tel système on a donc :

$$R(t) \geq e^{-\lambda_V(\infty)t} = e^{-t/MUT}.$$

Approximation du taux de défaillance

Le système formé de composants indépendants est-il NBU ?
oui si les taux de défaillance sont constants et les taux de réparation décroissants.

Connait-on d'autres systèmes NBU avec composants réparables ?
oui, dans le cas de modélisation par processus markoviens de sauts.

C. COCOZZA–THIVENT et M. ROUSSIGNOL. Techniques de couplage en fiabilité. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **31**, 1, 119–141, 1995.

Approximation du taux de défaillance

Le système formé de composants indépendants est-il NBU ?
oui si les taux de défaillance sont constants et les taux de réparation décroissants.

Connait-on d'autres systèmes NBU avec composants réparables ?
oui, dans le cas de modélisation par processus markoviens de sauts.

C. COCOZZA–THIVENT et M. ROUSSIGNOL. Techniques de couplage en fiabilité. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **31**, 1, 119–141, 1995.

Cet article répond à d'autres questions "naturelles".

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas général, que les composants soient indépendants ou non, c'est λ_0 et non λ_V qui permet d'avoir une approximation pessimiste.

Approximation du taux de défaillance

Dans le cas général, que les composants soient indépendants ou non, c'est λ_0 et non λ_V qui permet d'avoir une approximation pessimiste.

Comment évaluer λ_0 ?

par simulation de Monte Carlo

Pour les événements rares (calcul de défiabilité pour des systèmes fiables), on a peut-être **moins de problème qu'avec une simulation directe ?** (comme pour un échantillonnage d'importance).

Approximation du taux de défaillance

Majoration de l'erreur relative entre $\lambda(\infty)$ et $\lambda_V(\infty)$

C. COCOZZA-THIVENT, V. KALASHNIKOV : The failure rate in reliability : Approximations and bounds. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, **9**, 4, 497-530, 1996.

C. COCOZZA-THIVENT, V. KALASHNIKOV : The failure rate in reliability : Numerical treatment. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, **10**, 1, 21-45, 1997.

Approximation du taux de défaillance

Majoration de l'erreur relative entre $\lambda(\infty)$ et $\lambda_V(\infty)$

C. COCOZZA-THIVENT, V. KALASHNIKOV : The failure rate in reliability : Approximations and bounds. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, **9**, 4, 497-530, 1996.

C. COCOZZA-THIVENT, V. KALASHNIKOV : The failure rate in reliability : Numerical treatment. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, **10**, 1, 21-45, 1997.

Y a-t-il des modèles de fiabilité plus généraux qui donnent des processus décomposables ?

Et la formule bien connue ?

Comment démontrer proprement la formule bien connue :

$$D(\infty) = \frac{MUT}{MTBF} \quad ?$$

En utilisant

- les processus semi-régénératifs : il y a plusieurs types de points de régénération,
- les équations de renouvellement markovien : systèmes d'équations qui sont des généralisations des équations de renouvellement.

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

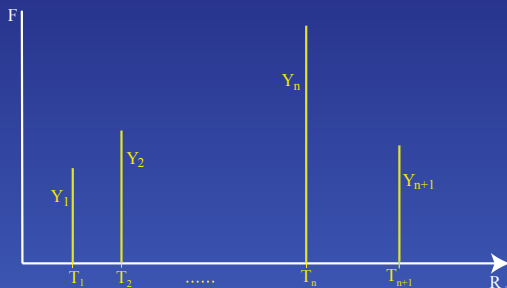
Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régénératifs à sauts (SRPJ)

Renouvellement markovien

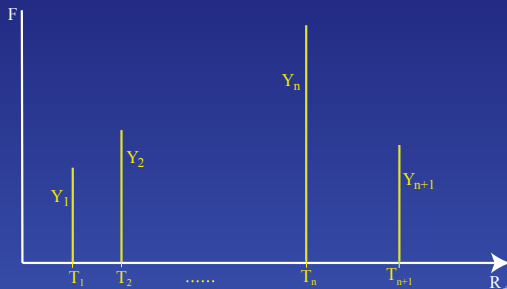
Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de v.a. positives.

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans F .



$(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$ est un **processus de renouvellement markovien de noyau de renouvellement markovien N** si pour tout $n \geq 1$, la loi de $(Y_{n+1}, T_{n+1} - T_n)$ connaissant $(Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n)$ ne dépend que de Y_n .

Renouvellement markovien



$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

$N(y, dz, dv)$: loi de $(Y_{n+1}, T_{n+1} - T_n)$ sachant $\{Y_n = y\}$

dF_y : loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $\{Y_n = y\}$

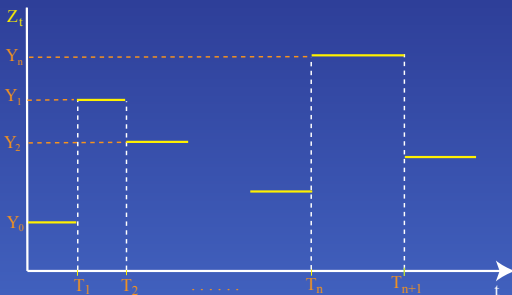
$\beta(y, v; dz)$: loi de Y_{n+1} sachant $\{Y_n = y, T_{n+1} - T_n = v\}$.

Renouvellement markovien et processus semi-markovien

Processus semi-markovien $(Z_t)_{t \geq 0}$

(Y, T) : processus de renouvellement markovien de noyau N

$$Z_t = Y_n \text{ pour } T_n \leq t < T_{n+1},$$



Renouvellement markovien et processus semi-markovien

Processus semi-markovien $(Z_t)_{t \geq 0}$

(Y, T) : processus de renouvellement markovien de noyau N

$$Z_t = Y_n \text{ pour } T_n \leq t < T_{n+1},$$

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

Processus markovien de sauts

- à espace d'états discret

$$dF_i(v) = a(i) e^{-a(i)v} dv, \quad \beta(i, v; j) = Q(i, j)$$

- à espace d'états quelconque

$$dF_y(v) = a(y) e^{-a(y)v} dv, \quad \beta(y, v; dz) = Q(y, dz).$$

Renouvellement markovien : exemples

Modèles d'âge virtuel

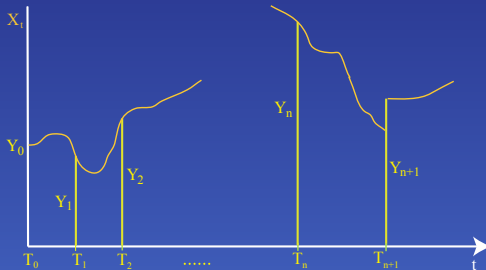
$$dF_y(v) = \lambda(y+v) e^{-\int_0^v \lambda(y+s) ds} dv,$$

$$\beta(y, v; dz) =$$

- $\delta_0(dz)$ pour le modèle *AGAN*,
- $\delta_{y+v}(dz)$ pour le modèle *ABAO*,
- $p \delta_0(dz) + (1-p) \delta_{y+v}(dz)$ pour le modèle *BP*,
- $\delta_{y+(1-\rho)v}(dz)$ pour le modèle *ARA₁*,
- $\delta_{(1-\rho)(y+v)}(dz)$ pour le modèle *ARA_∞*.

Semi-régénération

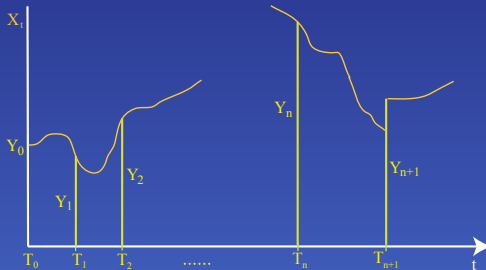
Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est **semi-régénératif** s'il existe un processus de renouvellement markovien (Y, T) , tel que, pour tout $n \geq 0$, la loi de $(T_{n+p} - T_n)_{p \geq 1}, (X_{t+T_n})_{t \geq 0}$ sachant $(Y_0, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n)$ ne dépend que de Y_n .



sur le dessin, $Y_n = X_{T_n}$, c'est souvent le cas mais ce n'est pas nécessaire

Semi-régénération

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est **semi-régénératif** s'il existe un processus de renouvellement markovien (Y, T) , tel que, pour tout $n \geq 0$, la loi de $(T_{n+p} - T_n)_{p \geq 1}, (X_{t+T_n})_{t \geq 0}$ sachant $(Y_0, Y_1, T_1, \dots, Y_n, T_n)$ ne dépend que de Y_n .



Si la chaîne de Markov Y admet un point récurrent x_0 , le processus est régénératif.

Semi-régénération

Si la chaîne de Markov Y admet un point récurrent x_0 , on pose $S = T_\nu$, où $\nu = \inf\{n \geq 1 : Y_n = x_0\}$. Si la loi de S est non arithmétique, le théorème de renouvellement donne :

$$\mathbb{E}(h(X_t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}_{x_0}(S)} \mathbb{E}_{x_0} \left(\int_0^S h(X_u) du \right)$$

et on montre que

$$\frac{1}{\mathbb{E}_{x_0}(S)} \mathbb{E}_{x_0} \left(\int_0^S h(X_u) du \right) = \frac{1}{\mathbb{E}_\nu(T_1)} \mathbb{E}_\nu \left(\int_0^{T_1} h(X_u) du \right)$$

où ν est la mesure stationnaire de la chaîne de Markov Y .

Si la chaîne de Markov Y est seulement Harris-récurrente ???

On va aborder le problème différemment.

Equations de renouvellement markovien

Si le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est semi-régénératif

$$f(x, t) = \mathbb{E}_x(h(X_t))$$

vérifie le système d'équations de renouvellement markovien :

$$\forall x, \quad f(x, t) = g(x, t) + \int 1_{[0, t]}(s) f(y, t - s) N(x, dy, ds)$$

Les équations de renouvellement markovien sont une généralisation des équations de renouvellement

$$f(t) = g(t) + \int 1_{[0, t]}(s) f(t - s) \nu(ds)$$

A-t-on des résultats sur $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t)$?

Equations de renouvellement markovien

On vérifie facilement sous des hypothèses de bornitudes que LA solution de

$$f(x, t) = g(x, t) + \int 1_{[0, t]}(s) f(y, t - s) N(x, dy, ds)$$

est

$$f = R * g, \quad R = \sum_{k \geq 0} N^{*k}.$$

Vaste littérature sur le comportement asymptotique de $R * g$

Equations de renouvellement markovien

J. Jacod, (1971 et 1974) *Ann. IHP*

H. Kesten, (1974) *Ann. Prob.*

D. McDonad, (1978) *Ann. Prob.*

E. Nummelin, (1978) *Ann. IHP*

E. Arjas, E. Nummelin, R.L. Tweedie, (1978) *J. Appl. Prob.*

K.B. Athreya, D. McDonad, P. Ney, (1978) *Ann. Prob.*

K.B. Athreya, P. Ney, (1978) *Bull. Austral. Math. Soc.*

... puis se tournent vers les grandes déviations ...

V.M. Shurenkov, (1984) *Theor. Prob. Appl.*

S. Niemi, E. Nummelin, (1986) *Stoch. Proc. Appl.*

G. Alsmeyer, (1994) *Stoch. Proc. Appl.*

G. Alsmeyer, (1998) *Markov Proc. Rel. Fields*

Equations de renouvellement markovien

J. Jacod, (1971 et 1974) *Ann. IHP*

H. Kesten, (1974) *Ann. Prob.*

D. McDonad, (1978) *Ann. Prob.*

E. Nummelin, (1978) *Ann. IHP*

E. Arjas, E. Nummelin, R.L. Tweedie, (1978) *J. Appl. Prob.*

K.B. Athreya, D. McDonad, P. Ney, (1978) *Ann. Prob.*

K.B. Athreya, P. Ney, (1978) *Bull. Austral. Math. Soc.*

V.M. Shurenkov, (1984) *Theor. Prob. Appl.*

S. Niemi, E. Nummelin, (1986) *Stoch. Proc. Appl.*

G. Alsmeyer, (1994) *Stoch. Proc. Appl.*

G. Alsmeyer, (1998) *Markov Proc. Rel. Fields*

- *Le plus souvent on a une convergence ν -presque partout.*
- *Les hypothèses sont compliquées à vérifier en pratique.*
- *Il y a toujours de manière plus ou moins explicite l'hypothèse que la chaîne Y est Harris-récurrente.*

Equations de renouvellement markovien

On a réussi à vérifier des hypothèses qui permettent de montrer rigoureusement que :

$$D(\infty) = \frac{MUT}{MTBF}, \quad \lambda_V(\infty) = \frac{1}{MUT},$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_P(t+h) - N_P(t)) = \frac{h}{MTBF},$$

sous des conditions qui sont satisfaites notamment pour des composants en interaction avec **mode commun**, **redondance passive**, **nombre limité de réparateurs**, lorsque les taux sont bornés et ne tendent pas vers 0 à l'infini.

C. COCOZZA–THIVENT et M. ROUSSIGNOL. A general framework for some asymptotic reliability formulas. *Adv. Appl. Prob* **32**, 446-467 2000.

Equations de renouvellement markovien

Nous avons utilisé ces techniques dans plusieurs autres travaux en sûreté de fonctionnement et dans des problèmes d'optimisation de maintenance préventive.

En général les maintenances préventives facilitent les choses : existence d'un état de régénération.

Equations de renouvellement markovien

Nous avons utilisé ces techniques dans plusieurs autres travaux en sûreté de fonctionnement et dans des problèmes d'optimisation de maintenance préventive.

En général les maintenances préventives facilitent les choses : existence d'un état de régénération.

Lorsqu'il n'y a pas d'état de régénération, la vérification rigoureuse des hypothèses est une galère.

Pour les applications industrielles effectives, on peut faire jouer l'intime conviction. Pour publier un article dans une revue mathématique : non ...

Lorsqu'on arrive à vérifier les hypothèses, l'énergie dépensée en valait-elle la peine ?

Renouvellement markovien

Lorsqu'on a des taux non constants, pour faire apparaître des propriétés de semi-régénération, on a souvent besoin d'ajouter des variables complémentaires et de considérer un processus à valeurs dans un espace hybride $F = E \times \mathbb{R}^d$, E fini.

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régnératifs à sauts (SRPJ)

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

PDMP : Piecewise Deterministic Markov Process

Le pionnier pour l'introduction de processus hybrides et de modèles de type PDMP dans des problèmes de sûreté de fonctionnement est **JACQUES DEVOOGHT**, Université Libre de Bruxelles, Service de Métrologie Nucléaire.

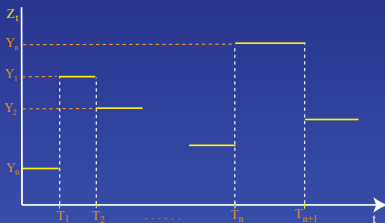
M.H.A. DAVIS a été le premier à donner une formalisation mathématique des PDMP (avec notamment des exemples en assurance) et à les étudier.

M.H.A. DAVIS. *Markov Models and Optimization*. Monographs on Statistics and Applied Probability 49, Chapman & Hall, 1993.

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Les PDMP généralisent les processus semi-markoviens.

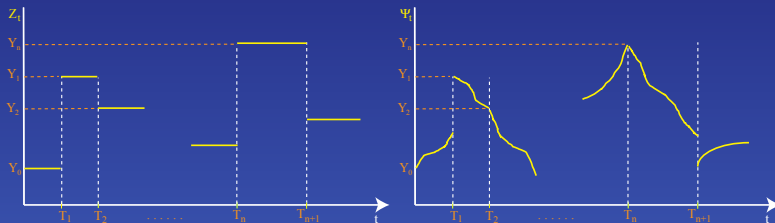
Un processus semi-markovien est constant entre les instants T_n ,



Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Les PDMP généralisent les processus semi-markoviens.

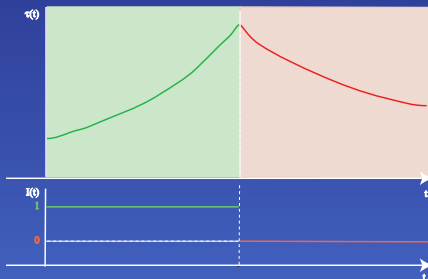
Un processus semi-markovien est constant entre les instants T_n ,



un PDMP est déterministe entre les instants T_n
avec des conditions liant le noyau du processus de renouvellement
markovien et le processus déterministe, pour avoir une bonne
interprétation et un processus de Markov.

Premier exemple de PDMP hybride

- Le taux de défaillance d'un composant dépend de sa température,
- La température du composant a une cinétique différente lorsque le composant est en marche ou en panne.

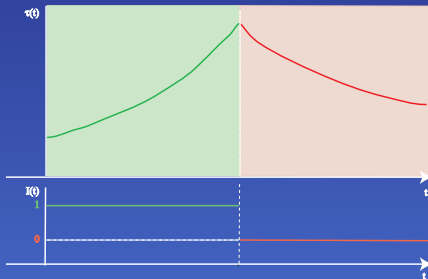


Premier exemple de PDMP hybride

Le PDMP est $\Psi_t = (I(t), \tau(t))$.

Pour Davis les processus déterministes sont solutions de systèmes d'équations différentielles, c'est-à-dire ici :

- si le composant est en marche $\tau'(t) = v_1(\tau(t))$, $I'(t) = 0$,
- si le composant est en panne $\tau'(t) = v_0(\tau(t))$, $I'(t) = 0$.



Deuxième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par une pompe et un réservoir de secours.

Normalement le réservoir est plein et la pompe fonctionne en assurant le débit demandé (débit nominal).

Lorsque la pompe tombe en panne, le circuit est alimenté par le réservoir tant qu'il n'est pas vide.

Lorsque la pompe est réparée, elle fournit un débit supérieur au débit nominal tant que le réservoir n'est pas plein.

L'événement indésirable est l'absence de distribution d'eau, c'est-à-dire le réservoir vide.

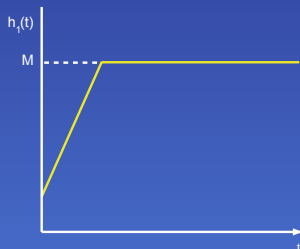
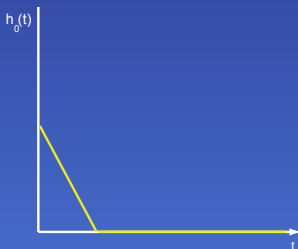
Deuxième exemple de PDMP hybride

Le PDMP est $\Psi_t = (I(t), H(t))$.

La hauteur d'eau dans le réservoir, $h(t)$, vérifie :

- lorsque la pompe est en panne " $h'_0(t) = -d_1 1_{\mathbb{R}_+}(h_0(t))$ ",
 $I'(t) = 0$
- lorsque la pompe est en marche " $h'_1(t) = d_2 1_{[0, M]}(h_1(t))$ ",
 $I'(t) = 0$.

La hauteur d'eau dans le réservoir ne satisfait pas une équation différentielle à cause des discontinuités dans la dérivée.



Deuxième exemple de PDMP hybride

Le PDMP est $\Psi_t = (I(t), H(t))$.

La hauteur d'eau dans le réservoir, $h(t)$, vérifie :

- lorsque la pompe est en panne " $h'_0(t) = -d_1 1_{\mathbb{R}_+}(h_0(t))$ ",
 $I'(t) = 0$
- lorsque la pompe est en marche " $h'_1(t) = d_2 1_{[0, M]}(h_1(t))$ ",
 $I'(t) = 0$.

Jacobsen suppose seulement que l'évolution déterministe ϕ vérifie

$$\phi(y, 0) = y, \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$$

Dans l'exemple $y = (i, h)$ et $\phi(y, t) = (i, h(t))$.

M. JACOBSEN. *Point Process Theory and Applications, Marked Point and Piecewise Deterministic Processes*. Birkhäuser, 2006.

Ce cadre est à la fois plus et moins général que celui de Davis car **Davis introduit des frontières** et pas Jacobsen.

Deuxième exemple de PDMP hybride

En fait dans cet exemple on peut se ramener à la modélisation de Davis en introduisant des frontières.

Mais les frontières introduisent en général des difficultés techniques.

Par contre dans certains exemples on ne peut se passer de l'introduction de frontières.

Troisième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par un réservoir.

Une pompe alimente le réservoir.

La pompe démarre seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{min} (si elle n'est pas en panne !).

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{max} .

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge et un taux de réparation dépendant du temps.

Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.

Troisième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par un réservoir.

Une pompe alimente le réservoir.

La pompe démarre seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{min} (si elle n'est pas en panne !).

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{max} .

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge et un taux de réparation dépendant du temps.

Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.

Il faut donc bien distinguer les états "arrêt" et "marche", ce qui nécessite l'introduction de frontières.

Troisième exemple de PDMP hybride

Un circuit hydraulique est alimenté par un réservoir.

Une pompe alimente le réservoir.

La pompe démarre seulement lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{min} (si elle n'est pas en panne !).

La transition "pompe à l'arrêt \rightarrow pompe en marche" est déclenchée par l'atteinte du niveau h_{min} .

La pompe s'arrête lorsque le niveau d'eau dans le réservoir atteint la hauteur h_{max} .

La transition "pompe en marche \rightarrow pompe à l'arrêt" est déclenchée par l'atteinte du niveau h_{max} .

La pompe a un taux de défaillance fonction de son âge et un taux de réparation dépendant du temps.

Lorsque la pompe est à l'arrêt, elle ne vieillit pas.

Il faut donc bien distinguer les états "arrêt" et "marche", ce qui nécessite l'introduction de frontières.

Quatrième exemple de PDMP hybride

Système formé de composants de **taux** de défaillance et de réparation **non constants**, en interaction :

- redondance passive,
- mode commun de défaillance,
- nombre limité de réparateurs.

Quatrième exemple de PDMP hybride

Système formé de composants de **taux** de défaillance et de réparation **non constants**, en interaction :

- redondance passive,
- mode commun de défaillance,
- nombre limité de réparateurs.

Au lieu d'avoir des taux (de réparation), on peut avoir des **durées** (de réparation) **constantes**.

Quatrième exemple de PDMP hybride

Système formé de composants de **taux** de défaillance et de réparation **non constants**, en interaction :

- redondance passive,
- mode commun de défaillance,
- nombre limité de réparateurs.

Au lieu d'avoir des taux (de réparation), on peut avoir des **durées** (de réparation) **constantes**.

On peut avoir des maintenances préventives, par exemple "selon l'âge".

Quatrième exemple de PDMP hybride

Système formé de composants de **taux** de défaillance et de réparation **non constants**, en interaction :

- redondance passive,
- mode commun de défaillance,
- nombre limité de réparateurs.

Au lieu d'avoir des taux (de réparation), on peut avoir des **durées** (de réparation) **constantes**.

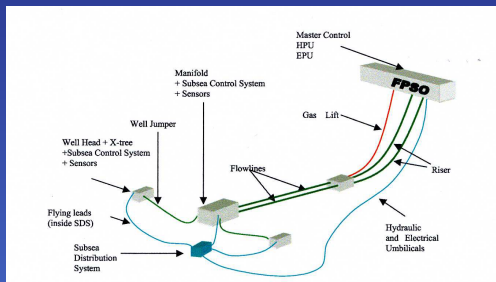
On peut avoir des maintenances préventives, par exemple "selon l'âge".

Dans cet exemple la modélisation par un PDMP revient à une méthode de variables complémentaires.

Cinquième exemple de PDMP hybride

Un système de production pétrolière offshore

F. DUFOUR, Y. DUTUIT, C. ELEGBEDE, H. ZHANG. Application des processus déterministes par morceaux à un système de production offshore. *Congrès $\lambda - \mu$ 16, Avignon 2008.*



16 composants de taux de défaillance et de réparation constants

Cinquième exemple de PDMP hybride

- Les composants de surface sont immédiatement réparables
- La réparation des composants sous-marins nécessite un **robot réparateur** :
 - ▶ son déplacement sur site prend une journée
 - ▶ il n'y a qu'un robot et pas de priorité
- **Formation de bouchons d'hydrates** qui induisent une probabilité de non redémarrage après un arrêt du système. Cette probabilité dépend :
 - ▶ du démarrage ou non d'une pompe à méthanol
 - ▶ de la durée de l'arrêt
- **Formation de dépôts de paraffine** qui entraînent une diminution du débit de production :
 - ▶ passage dans la conduite, à intervalles réguliers, d'un outil qui racle les dépôts
 - ▶ l'outil peut rester coïncé

L'objectif est de calculer la quantité moyenne d'hydrocarbures produite en 7300 jours.

Quantification des PDMP

Les calculs peuvent se faire

- par simulations de Monte-Carlo

- par algorithmes numériques déterministes

Quantification des PDMP

Les calculs peuvent se faire

- par simulations de Monte-Carlo
 - ▶ avec des réseaux de Petri stochastiques : introduction de discrétisations,
 - ▶ directement à partir de la description mathématique du PDMP (équipe CQFD de l'INRIA de Bordeaux).
- par algorithmes numériques déterministes

Quantification des PDMP

Les calculs peuvent se faire

- **par simulations de Monte-Carlo**
 - ▶ avec des réseaux de Petri stochastiques : introduction de discrétisations,
 - ▶ directement à partir de la description mathématique du PDMP (équipe CQFD de l'INRIA de Bordeaux).
- **par algorithmes numériques déterministes**
 - ▶ pour le calcul des lois marginales, dans le cas sans frontière, par des méthodes de volumes finis à partir des équations avant de Chapman-Kolmogorov (système d'e.d.p. couplées) (R. EYMARD, S. MERCIER, A. PRIGNET à l'UPE-MLV),
 - ▶ par discrétisation du processus pour obtenir un processus markovien de sauts ou une chaîne de Markov à espace d'états finis.

Construction d'un PDMP

- L'évolution déterministe est donnée par $\phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow F$ telle que $\forall y \in F \quad \phi(y, 0) = y, \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$
- (Y, T) est un **processus de renouvellement markovien** à valeurs dans F
 $F = \cup_{i \in E} \{i\} \times F_i$ dans le cas des PDMP hybrides.

Construction d'un PDMP

- L'évolution déterministe est donnée par $\phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow F$ telle que $\forall y \in F \quad \phi(y, 0) = y, \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$
- (Y, T) est un **processus de renouvellement markovien** à valeurs dans F de noyau de renouvellement markovien N :

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

- dans le cas sans frontière, $dF_y(v)$ a une densité de taux $\lambda(y, v) = b(\phi(y, v))$
- $\beta(y, v; dz) = Q(\phi(y, v); dz)$.

Construction d'un PDMP

- L'évolution déterministe est donnée par $\phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow F$ telle que $\forall y \in F \quad \phi(y, 0) = y, \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$
- (Y, T) est un **processus de renouvellement markovien** à valeurs dans F de noyau de renouvellement markovien N :

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

- dans le cas avec frontière, dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$
 - ▶ S_y v.a. de taux de hasard $\lambda(y, v) = b(\phi(y, v))$
 - ▶ $\alpha(y) = \inf\{t : \phi(y, t) \in \Gamma\}$ Γ est la "frontière"
plus généralement $\alpha(\phi(y, u)) = \alpha(y) - u$
- $\beta(y, v; dz) = Q(\phi(y, v); dz)$.

Construction d'un PDMP

- L'évolution déterministe est donnée par $\phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow F$ telle que $\forall y \in F \quad \phi(y, 0) = y, \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$
- (Y, T) est un **processus de renouvellement markovien** à valeurs dans F de noyau de renouvellement markovien N :

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

- dans le cas avec frontière, dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$
 - ▶ S_y v.a. de taux de hasard $\lambda(y, v) = b(\phi(y, v))$
 - ▶ $\alpha(y) = \inf\{t : \phi(y, t) \in \Gamma\}$ Γ est la "frontière"
plus généralement $\alpha(\phi(y, u)) = \alpha(y) - u$
- $\beta(y, v; dz) = Q(\phi(y, v); dz)$.

Le PDMP est défini par :

$$\Psi_t = \phi(Y_n, t - T_n) \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}$$

Construction d'un PDMP

- L'évolution déterministe est donnée par $\phi : F \times \mathbb{R}_+ \rightarrow F$ telle que

$$\forall y \in F \quad \phi(y, s + t) = \phi(\phi(y, s), t)$$
- (Y, T) est un **processus de renouvellement markovien** à valeurs dans F de noyau de renouvellement markovien N :

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz)$$

- dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$
 - ▶ S_y v.a. de taux de hasard $b(\phi(y, v))$
 - ▶ $\alpha(y) = \inf\{t : \phi(y, t) \in \Gamma\}$ Γ est la "frontière"
plus généralement $\alpha(\phi(y, u)) = \alpha(y) - u$
- $\beta(y, v; dz) = Q(\phi(y, v); dz)$.

Le PDMP est défini par :

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \phi(Y_n, t - T_n) \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1} \\ &= \phi(Z_t, A_t) \quad (Z_t, A_t) : \text{CSMP associé} \end{aligned}$$

PDMP et CSMP

On est passé

des PDMP aux CSMP

qui sont des PDMP particuliers dans lesquels l'évolution déterministe est très simple (linéaire).

Cela permet d'avoir une séparation entre :

- les difficultés liées à la structure de type renouvellement markovien,
- les difficultés liées à l'évolution déterministe.

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

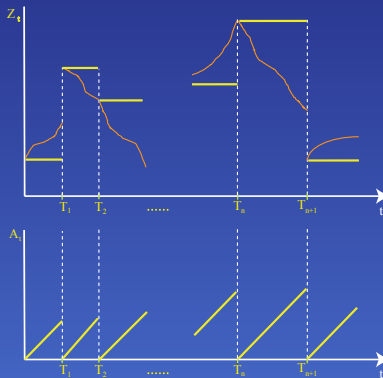
Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régénératifs à sauts (SRPJ)

Processus Semi-Markovien complété (CSMP)

CSMP : Complemented Semi Markov Process

Z_t : processus semi-markovien, A_t : durée écoulée depuis le dernier saut, (Z_t, A_t) processus semi-markovien complété



CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Soit dF_y la loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $\{Y_n = y\}$.

Dans les PDMP introduits par Davis,

$$\begin{aligned} dF_y(t) &= \lambda_y(t) e^{-\int_0^t \lambda_y(s) ds} \mathbf{1}_{\{t < \alpha(y)\}} dt + e^{-\int_0^{\alpha(y)} \lambda_y(s) ds} \delta_{\alpha(y)}(dt) \\ &= f_y(t) \mathbf{1}_{\{t < \alpha(y)\}} dt + \bar{F}_y(t) \delta_{\alpha(y)}(dt). \end{aligned}$$

Pourquoi ne pas prendre, plus généralement

$$dF_y(t) = q_0(y) h_y(t) dt + \sum_{k=1}^{M(y)} q_k(y) \delta_{\alpha_k(y)}(dt) ?$$

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Soit dF_y la loi de $T_{n+1} - T_n$ sachant $\{Y_n = y\}$.

Dans les PDMP introduits par Davis,

$$\begin{aligned} dF_y(t) &= \lambda_y(t) e^{-\int_0^t \lambda_y(s) ds} 1_{\{t < \alpha(y)\}} dt + e^{-\int_0^{\alpha(y)} \lambda_y(s) ds} \delta_{\alpha(y)}(dt) \\ &= f_y(t) 1_{\{t < \alpha(y)\}} dt + \bar{F}_y(t) \delta_{\alpha(y)}(dt). \end{aligned}$$

Pourquoi ne pas prendre, plus généralement

$$dF_y(t) = q_0(y) h_y(t) dt + \sum_{k=1}^{M(y)} q_k(y) \delta_{\alpha_k(y)}(dt) ?$$

parce que **les formules sont épouvantables** lorsqu'on écrit le compensateur du processus ponctuel marqué $(Y_n, T_n)_{n \geq 1}$, et par suite le générateur du CSMP et du PDMP.

Mais

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Un matériel a une durée de vie “intrinsèque” de loi de densité f .

Une fusée

A des instants α_i ($1 \leq i \leq M$), le matériel subit des sollicitations particulières qui peuvent entraîner sa défaillance immédiate.

largue ses étages

La probabilité que la $i^{\text{ème}}$ sollicitation entraîne la défaillance immédiate est p_i .

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Un matériel a une durée de vie “intrinsèque” de loi de densité f .

Une fusée

A des instants α_i ($1 \leq i \leq M$), le matériel subit des sollicitations particulières qui peuvent entraîner sa défaillance immédiate.

largue ses étages

La probabilité que la $i^{\text{ème}}$ sollicitation entraîne la défaillance immédiate est p_i .

La loi de la durée de fonctionnement du matériel est :

$$\begin{aligned}
 dF(t) = & \left(\mathbf{1}_{\{t < \alpha_1\}} + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) \mathbf{1}_{\{\alpha_{i-1} < t < \alpha_i\}} \right. \\
 & \left. + (1 - p_1) \cdots (1 - p_M) \mathbf{1}_{\{t > \alpha_M\}} \right) f(t) dt + p_1 \bar{F}(\alpha_1) \delta_{\alpha_1}(dt) \\
 & + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) p_i \bar{F}(\alpha_i) \delta_{\alpha_i}(dt).
 \end{aligned}$$

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Avec une loi de la forme

$$dF(t) = \left(1_{\{t < \alpha_1\}} + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) 1_{\{\alpha_{i-1} < t < \alpha_i\}} \right. \\ \left. + (1 - p_1) \cdots (1 - p_M) 1_{\{t > \alpha_M\}} \right) f(t) dt + p_1 \bar{F}(\alpha_1) \delta_{\alpha_1}(dt) \\ + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) p_i \bar{F}(\alpha_i) \delta_{\alpha_i}(dt)$$

les formules sont sympathiques.

Le compensateur de $1_{\{T \leq t\}}$ est :

$$\int_{[0,t]} 1_{[0,T]}(s) \frac{dF_y(s)}{dF_y([s, +\infty[)} = \int_{[0,t]} 1_{[0,T]}(s) \left(\lambda(s) ds + \sum_{i=1}^M p_i \delta_{\alpha_i}(ds) \right)$$

avec λ taux de hasard de f .

CSMP : pourquoi se limiter à la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$?

Avec une loi de la forme

$$dF(t) = \left(1_{\{t < \alpha_1\}} + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) 1_{\{\alpha_{i-1} < t < \alpha_i\}} \right. \\ \left. + (1 - p_1) \cdots (1 - p_M) 1_{\{t > \alpha_M\}} \right) f(t) dt + p_1 \bar{F}(\alpha_1) \delta_{\alpha_1}(dt) \\ + \sum_{i=2}^M (1 - p_1) \cdots (1 - p_{i-1}) p_i \bar{F}(\alpha_i) \delta_{\alpha_i}(dt)$$

les formules sont sympathiques.

Toute loi mélange d'une loi à densité et d'un nombre fini de masses de Dirac peut se mettre sous la forme ci-dessus.

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

On considère le CSMP associé un processus de renouvellement markovien de noyau

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) \beta(y, v; dz).$$

où dF_y a la forme précédente et soit $\lambda(y, \cdot)$ le taux de hasard de f_y .

Pour φ telle que pour $z \in F$, $v \rightarrow \varphi(z, v)$ soit absolument continue et telle que φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ soient bornées sur $F \times [0, a]$ pour tout a on pose :

$$(L\varphi)(y, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(y, u) + \int_F (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u)) \lambda(y, u) \beta(y, u; dz).$$

Soit P_t le semi-groupe du CSMP :

$$(P_t \varphi)(y, u) = \mathbb{E}_{y, u}(\varphi(Z_t, A_t)).$$

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

$$(L\varphi)(y, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(y, u) + \int_F (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u)) \lambda(y, u) \beta(y, u; dz).$$

On suppose que les lois $dF_y(v) = f_y(v) dv$ (pas de Dirac). On a :

$$(P_t\varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_0^t (P_s L\varphi)(y, u) ds \quad (\text{équation avant})$$

et pour presque tout u :

$$(P_t L\varphi)(y, u) = (LP_t\varphi)(y, u) \quad (\text{équation arrière})$$

Si $v \rightarrow \varphi(z, v)$ est de classe C^1 et sous des hypothèses de continuité de λ et β , on peut enlever les presque partout.

On en déduit des résultats analogues dans le cas des PDMP et on retrouve les résultats de Jacobsen sur la caractérisation des probabilités stationnaires π par $\pi L\varphi = 0$, avec φ dans une classe raisonnable.

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

Lorsqu'il y a des masses de Dirac, $t \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ n'est en général pas continue.

Pour avoir $P_t\varphi = \varphi + \int_0^t P_s L\varphi ds$, par exemple dans le cas classique d'un CSMP "simple", i.e. dF_y est la loi de $\min(S_y, \alpha(y))$, il faut imposer :

$$\text{lorsque } \alpha(y) < +\infty : \quad \varphi(y, \alpha(y)) = \int_F \varphi(z, 0) \beta(y, \alpha(y); dz).$$

La classe de fonctions vérifiant cette condition est trop restrictive pour pouvoir travailler avec ...

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

En fait la fonction $t \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ est à variations bornées :

$$(P_t\varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_{[0,t]} (D_1^{y,u}\varphi)(dv)$$

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

En fait la fonction $t \rightarrow (P_t \varphi)(y, u)$ est à variations bornées :

$$(P_t \varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_{[0, t]} (D_1^{y, u} \varphi)(dv)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} h(v) (D_1^{y, u} \varphi)(dv) &= \int_{\mathbb{R}_+} h(v) (P_v L \varphi)(y, u) dv \\ &+ \int_{F \times \mathbb{R}_+} h(v) (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u + v)) n_0^{y, u}(dz, dv) \\ &+ \int_{(F \times \mathbb{R}_+)^2} h(v + v_1) (\varphi(z_1, 0) - \varphi(z, v_1)) n(z, dz_1, dv_1) \rho^{y, u}(dz, dv). \end{aligned}$$

n : partie contenant les masses de Dirac du noyau N

$\rho^{y, u} = (\rho_c^{y, u} + n_0^{y, u}) * r$: intensité du processus de renouvellement markovien

$$\rho_c^{y, u}(dz, dv) = \mathbb{E}_{y, u}(\lambda(Z_v, A_v) \beta(Z_v, A_v; dz)) dv.$$

CSMP : ennuis créés par les masses de Dirac

Les fonctions $t \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ et $u \rightarrow (P_t\varphi)(y, u)$ sont à variations bornées :

$$(P_t\varphi)(y, u) = \varphi(y, u) + \int_{[0,t]} (D_1^{y,u}\varphi)(dv) \quad (\text{équation avant})$$

$$(D_1^{y,u}\varphi)(ds) du = (\mathcal{L}P_s\varphi)(y, du) ds \quad (\text{équation arrière})$$

généralisation de $P_tL = LP_t$

$$(\mathcal{L}\varphi)(y, du) = (\partial_2\varphi)(y, du) + \int_F (\varphi(z, 0) - \varphi(y, u)) \lambda(y, u) \beta(y, u; dz) du$$

Si φ est absolument continue :

$$(\mathcal{L}\varphi)(y, du) = (L\varphi)(y, u) du.$$

Comportement asymptotique des CSMP et des PDMP

L'étude du comportement asymptotique des CSMP présente les mêmes difficultés que l'étude du comportement asymptotique des équations de renouvellement markovien.

D'ailleurs, la plupart des articles mentionnés pour la deuxième question s'intéressent également à la première, ou à l'étude du comportement asymptotique de (\tilde{Z}_t, W_t) :

$$\text{sur } T_n \leq t < T_{n+1}, \quad \tilde{Z}_t = Y_{n+1}, \quad W_t = T_{n+1} - T_n.$$

Une approche utilisant une autre chaîne de Markov que (Y_n) :
O. COSTA, F. DUFOUR, Stability and ergodicity of piecewise-deterministic Markov processes, *SIAM J. Control Optim.*, **47**, 2, p. 1053–1077, 2008.

Plan

Des indicateurs quantitatifs de la fiabilité prévisionnelle

Quantification dans les modèles classiques de fiabilité prévisionnelle

Approximation du taux de défaillance

Renouvellement markovien

Processus de Markov déterministe par morceaux (PDMP)

Processus semi-markoviens complétés (CSMP)

Processus semi-régénératifs à sauts (SRPJ)

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

SRPJ : Semi-Regenerative Process with Jumps

Comment remplacer les processus déterministes des PDMP par des processus aléatoires ?

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

SRPJ : **S**emi-**R**egenerative **P**rocess with **J**umps

Comment remplacer les processus déterministes des PDMP par des processus aléatoires ?

On remplace ϕ

$$\phi(y, t + s) = \phi(\phi(y, s), t), \quad \phi(y, 0) = y$$

par ζ

$$\zeta \text{ processus de Markov, } \zeta^y(0) = y,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \phi(y, v) &\rightarrow \zeta^y(v) \\ N(y, dz, dv) &\rightarrow M(\zeta^y, dz, dv) \end{aligned}$$

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

$$N(y, dz, dv) = dF_y(v) Q(\phi(y, v); dz)$$

$$M(\zeta^y, dz, dv) = dF_{\zeta^y}(v) Q(\zeta^y(v); dz)$$

Dans dF :

$$b(\phi(y, v)) \rightarrow b(\zeta^y(v))$$

$$\alpha(y) = \inf\{t : \phi(y, t) \in \Gamma\} \rightarrow \alpha(\zeta^y) = \inf\{t : \zeta^y(t) \in \Gamma\}$$

Pour $T_n \leq t < T_{n+1}$:

$$\Psi_t = \Phi(Y_n, t - T_n) \rightarrow \Psi_t = \zeta^{Y_n}(t - T_n)$$

La frontière Γ n'introduit pas de masses de Dirac, c'est-à-dire pas des complications dans les formules, si pour tout y la loi du temps d'atteinte de Γ par ζ^y admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

- des processus multiphases

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

Par exemple la propagation d'une fissure, hors chocs, est modélisée par un processus Gamma. Lors d'un choc, la taille de la fissure s'accroît, la loi de l'accroissement dépendant de la taille de la fissure juste avant le choc.

Dans ce cas, les sauts provoqués par le dépassement d'un seuil donné n'introduisent pas de masses de Dirac.

- des processus multiphases

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

Par exemple la propagation d'une fissure, hors chocs, est modélisée par un processus Gamma. Lors d'un choc, la taille de la fissure s'accroît, la loi de l'accroissement dépendant de la taille de la fissure juste avant le choc.

Dans ce cas, les sauts provoqués par le dépassement d'un seuil donné n'introduisent pas de masses de Dirac.

- des processus multiphases

Par exemple les phases peuvent être les phases de décollage, de vol et d'atterrissage d'un avion.

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

Cela permet de modéliser notamment :

- des processus subissant des chocs

Par exemple la propagation d'une fissure, hors chocs, est modélisée par un processus Gamma. Lors d'un choc, la taille de la fissure s'accroît, la loi de l'accroissement dépendant de la taille de la fissure juste avant le choc.

Dans ce cas, les sauts provoqués par le dépassement d'un seuil donné n'introduisent pas de masses de Dirac.

- des processus multiphases

Par exemple les phases peuvent être les phases de décollage, de vol et d'atterrissage d'un avion.

A la Journée SMAI - IMdR, "Mathématiques Appliquées et Sûreté de Fonctionnement" à Pau en février 2009, J.P. Signoret (Total) s'est plaint que les universitaires ne s'intéressaient pas aux phénomènes multi-phases ...

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

Quelques résultats

- (Y, T) est un processus de renouvellement markovien de noyau $N(y, dz, dv) = \mathbb{E}(M(\zeta^y; dz, dv))$,
- Ψ est un processus de Markov,
- formule de passage du SRPJ au CSMP :

$$\mathbb{E}(f(\Psi_t)) = \mathbb{E}(\varphi(Z_t, A_t)),$$

$$\varphi(z, v) = \frac{f(\zeta^z(v)) M(\zeta^z, F \times]v, +\infty])}{\mathbb{E}(M(\zeta^z, F \times]v, +\infty])]} = \mathbb{E}(f(\zeta^z(v)) / T_1 > v),$$

- **nombre moyen de pannes** : propriété du PRM (Y, T)
- **processus décomposable** : oui si les $\int_z M(\zeta^y, dz, dv)$ ont des densités par rapport à la mesure de Lebesgue, et “presque” lorsque ce sont les $\int_z N(y, dz, dv)$, d'où une évaluation pessimiste de la fiabilité avec λ_0 ,
- **$\lambda_0 =$ taux de Vesely** : non, c'est très spécifique aux composants indépendants avec taux de défaillance constants.

Processus semi-régénératifs avec sauts (SRPJ)

Autres propriétés des SRPJ ?

Statistiques sur les PDMP et les SRPJ ?

Qu'est-ce que cette approche par les SRPJ apporte par rapport à ce qui se fait sur les diffusions auxquelles on ajoute des sauts ?

...

Prenez la relève si le sujet vous intéresse ...

Quelques unes de mes sources d'inspiration

Livres

- A. PAGES et M. GONDRAN : *Fiabilité des systèmes*
- S. ASMUSSEN : *Applied Probability and Queues*
- M.H.A. DAVIS : *Markov Models and Optimization*

Contacts

- Ingénieurs du département Management des Risques Industriels d'EDF R&D
- Ingénieurs et collègues de la section CNU 61 (Génie informatique, automatique et traitement du signal) rencontrés à l'Institut de Maîtrise des Risques (IMdR anciennement ISdF)
- V. KALASHNIKOV

Culture "systèmes de particules"