

# Wave Propagation, Observation and Control in $1 - d$ Flexible Multi-structures

René Dáger et Enrique Zuazua

L'ouvrage de René Dáger et Enrique Zuazua a pour objet d'analyser et d'étudier les vibrations de réseaux formés de cordes élastiques disposées sur un graphe plan, puis les possibilités de contrôle de ces vibrations.

Tout le monde a pu observer des constructions formées de réseaux d'objets élastiques essentiellement monodimensionnels reliés à des points de jonction par deux, trois ou plus (grues, bras articulés, tour Eiffel, ...). Etudier les vibrations de tels objets ainsi que les possibilités d'arrêter ces vibrations est un objectif très intéressant pour les sciences de l'ingénieur. Mais il se trouve aussi que ce problème pose également des questions mathématiques extrêmement intéressantes. Pour les applications mécaniques, les réseaux sont le plus souvent formés de poutres élastiques, sujet qui est abordé rapidement à la fin du livre, mais le cas de cordes élastiques constitue une étape essentielle qui n'est pas encore totalement dominée.

Un travail fondamental a été fait il y a quelques années dans une série d'articles et un livre par J. Lagnese, G. Leugering et G. Schmidt. Leur approche voulait être très générale dans sa forme et la complexité du contexte ne laissait pas bien apparaître les problèmes de fond sur le plan mathématique. L'approche de René Dáger et Enrique Zuazua, au contraire, se limite, au moins au début, à quelques situations de réseaux basiques (étoile, arbre, ...) mais approfondit considérablement l'étude mathématique dans ces cas en cherchant les raisons essentielles de tel ou tel phénomène. La complexité de l'aspect "graphe" du problème avec les notations et le formalisme adapté est alors ici réduite au strict minimum, ce qui rend la lecture nettement plus aisée pour un mathématicien analyste. Il me semble aussi qu'un ingénieur pourra trouver, dans la lecture de ce livre, beaucoup d'éléments importants, de raisons profondes qui pourront l'éclairer sur le pourquoi de la persistance de vibrations dans une structure pourtant supposée amortie, ou le comment essayer d'annuler ces vibrations.

Ce livre est essentiellement auto-contenu, ce qui rend sa lecture très abordable et très enrichissante pour un non spécialiste qui trouvera dans les deux premiers chapitres suivant l'introduction tous les éléments sur les réseaux de cordes élastiques

ainsi que sur l'analyse et le contrôle de l'équation des ondes monodimensionnelle qui seront nécessaires dans la suite.

Le chapitre 2 commence avec la méthode de Fourier pour l'équation des ondes 1-d et des remarques basiques sur l'observabilité. Puis il donne le formalisme général du problème des vibrations d'un réseau et du problème de contrôle associé. Les différentes notions de contrôlabilité (exacte, approchée, spectrale) sont rappelées et le chapitre se termine par l'énoncé du résultat fondamental de G. Schmidt sur la contrôlabilité d'un réseau.

Au chapitre 3, les auteurs donnent les outils essentiels de l'analyse du problème de contrôle. Après avoir examiné le cas d'une corde élastique, ils décrivent la méthode générale introduite par J.-L. Lions sous le nom de Hilbert Uniqueness Method (HUM) qui ramène l'étude des problèmes de contrôlabilité à l'obtention d'une inégalité d'observabilité pour le problème adjoint. Ils décrivent aussi la méthode des moments et les résultats de D. Russell. Ensuite, ils donnent (pour le cas monodimensionnel) des méthodes permettant d'obtenir des inégalités d'observabilité, avec poids éventuellement, par des arguments d'analyse harmonique ou spectrale, en particulier à l'aide des inégalités de type Ingham liées au comportement de l'écart entre valeurs propres.

Au chapitre 4, R. Dáger et E. Zuazua décrivent de manière très détaillée et fouillée le cas de réseaux de trois cordes, avec les cas de contrôle sur deux nœuds libres ou un seul nœud libre. Les résultats (positifs ou négatifs) sont expliqués et commentés et sont très complets. Les auteurs caractérisent, à l'aide de séries de Fourier avec poids, les espaces de données initiales contrôlables pour le cas de contrôles agissant sur un seul nœud.

Cette étude est étendue au chapitre 5 au cas d'arbres généraux avec contrôles agissant sur un seul nœud. Le formalisme est bien entendu ici plus compliqué et ce chapitre est plus ardu à lire bien que les méthodes et résultats soient des extensions de ceux développés au chapitre précédent. Les auteurs établissent un résultat de contrôlabilité spectrale ou approchée pour les arbres "non dégénérés" ainsi que la caractérisation, à l'aide d'inégalités d'observabilité avec poids, d'espaces de données initiales contrôlables. Les résultats sont ensuite appliqués à quelques cas simples.

Le chapitre 6 traite le cas de réseaux généraux sans configuration topologique particulière. Il est donné un résultat de contrôlabilité spectrale, puis par une application amusante du théorème des quatre couleurs, il est montré qu'avec quatre différents contrôles on arrive à la contrôlabilité spectrale du graphe.

Le chapitre 7 est court et peut être vu comme un chapitre de compléments. Il donne des résultats pour le contrôle simultané distribué dans des sous domaines. avec en particulier le cas de deux cordes de densités différentes ou de densités égales ou le cas de deux membranes de densités différentes.

Le chapitre 8 présente les cas d'autres équations sur des réseaux : cas des

équations de type chaleur, Schrödinger ou poutres, ce dernier cas étant les plus intéressants pour les applications aux sciences de l'ingénieur. Quelques résultats sont donnés pour ces cas mais l'étude n'est pas approfondie.

L'ouvrage se termine par l'énoncé de quelques problèmes ouverts, certains classiques et d'autres moins, tous intéressants pour des chercheurs jeunes ou moins jeunes.

Le livre de R. Dáger et E. Zuazua apporte ainsi une étude très fouillée et enrichissante des problèmes de vibrations d'un réseau distribué sur un graphe plan. Le sujet peut paraître a priori un peu spécifique mais il est original et plein d'intérêt et les auteurs ont su présenter les méthodes principales d'étude sur des cas suffisamment simples dans un premier temps pour être lisibles. Leur ouvrage restera certainement un ouvrage de référence.

Jean-Pierre Puel