TRAJECTOIRES A CONSOMMATION MINIMALE POUR LE DEPLOIEMENT ET LA RECONFIGURATION D'UNE FORMATION DE SATELLITES

Les industriels et les mathématiciens se parlent
Aéronautique et Espace
Université Paul Sabatier - Vendredi 9 juin 2006

Richard Epenoy CNES - DCT/SB/MO

Centre National d'Etudes Spatiales
18, avenue Edouard Belin 31401 Toulouse Cedex 9, FRANCE

Sommaire

- Les formations de satellites
  - Définition – Intérêt – Exemples
- Déploiement / reconfiguration à consommation minimale
  - Modélisation – Problème de contrôle optimal
  - Difficultés numériques
- Résolution du problème (post-doc CNES - ALCATEL ALENIA SPACE)
  - Techniques de continuation-lissage
  - Techniques de décomposition-coordination
- Application(s) envisagée(s)
  - Déploiement d'une formation en orbite LEO (Low Earth Orbit)
  - Reconfiguration d'une formation en orbite HEO (Highly Eccentric Orbit)
- Conclusion

Les formations de satellites (1/2)

Définition

- “Véhicules spatiaux volant en formation rapprochée”
- Des propriétés géométriques (distances, relations angulaires, …etc...) sont satisfaites à intervalles de temps réguliers
- Type d’orbite + lois de la mécanique spatiale ⇨ géométries possibles
- Formation ≠ constellation

Intérêt du vol en formation

- Synthèse d’instruments impossibles à réaliser sur un seul satellite
- Multiplication des points de vue et augmentation de la résolution
- Redondance possible en cas de panne d’un satellite

Les formations de satellites (2/2)

Principaux problèmes posés en mécanique spatiale

- Le déploiement: De l'injection par le lanceur à la satisfaction de la géométrie
- La reconfiguration: Modification de la géométrie (ex: cas de panne)
- Le maintien à poste: Compenser l'effet des perturbations (frottement,…etc…)

Utilisation des moteurs des satellites

⇨ **risque de collisions pendant le déploiement et la reconfiguration**

Exemples d'applications

- GRACE (lancé en 2002)
  - Mission: Établir un modèle très précis du champ de gravité terrestre
  - Moyens: Deux satellites en orbites LEO équipés d'un lien radiofréquence
  - Mesure de l'impact du champ de gravité sur la distance entre satellites
- SIMBOL-X (Phase A)
  - Mission: Observation d'étoiles dans le domaine des rayons X
  - Moyens: Un télescope formé par deux satellites sur une orbite HEO

Modélisation – Approche contrôle optimal

- N satellites (supposés identiques)
- Conditions initiales:
  - Les paramètres orbitaux des N satellites sont connus
- Conditions finales:
  - La date finale est fixée
  - Pour chaque satellite, certains paramètres orbitaux sont fixés
  - Des conditions ‘‘couplantes” reliant les paramètres orbitaux des différents satellites traduisent la géométrie de la formation
- Critère à minimiser: La somme des consommations
- Contraintes:
  - Équilibrage des consommations ⇨ condition ‘‘couplante” sur les masses finales
  - Évitement des collisions ⇨ contrainte sur l’état (point dur)

Le problème de contrôle optimal (sans contrainte sur l'état) (1/2)

$$
\begin{cases}
\text{Min} \quad J(u_1,\dots u_N) = -\sum_{i=1}^{N} m_i(t_f) \\
\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + T_{max}\, g(x_i(t)).\dfrac{u_i(t)}{m_i(t)} \\
\dot{m}_i(t) = -T_{max}\dfrac{\left\| u_i(t) \right\|}{g_0 Isp} \qquad\qquad i = 1.N \\
\left\| u_i(t) \right\| \le 1 \quad t \in \left[t_0, t_f \right] \\
x_i(t_0) = x_i^0 \quad h_i(x_i(t_f)) = 0 \quad i = 1.N \\
m_i(t_0) = m^0 \quad \boxed{\begin{array}{l} \varphi(x_1(t_f),\dots.x_N(t_f)) = 0 \\ \psi(m_1(t_f),\dots.m_N(t_f)) = 0 \end{array}}
\end{cases}
$$

⇨ Conditions ''couplantes''

Le problème de contrôle optimal (sans contrainte sur l'état) (2/2)

$\boxed{\varphi(x_1(t_f),\ldots.x_N(t_f)):}$ Dépend de la géométrie souhaitée

$$\psi(m_1(t_f),\ldots.m_N(t_f)) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \log(\alpha_i) + \beta \log(N)$$

$$\alpha_i = \frac{m_i(t_f)}{\sum_{k=1}^{N} m_k(t_f)} \quad i = 1..N$$

$\beta \in \left[\bar{\beta},1\right] \quad \bar{\beta} > 0$ Valeur "atteinte" par la solution sans contrainte

$$\beta = 1 \Rightarrow \left(\alpha_i = \frac{1}{N} \quad i = 1..N\right) \Rightarrow \left(m_1(t_f) = m_2(t_f) = \ldots = m_N(t_f)\right)$$

Difficultés / solutions

Les commandes optimales $\bar{u}_i$ (i = 1..N) sont ''bang-bang''

$$\bar{u}_i(t) = -\beta_i(t)\frac{g(x_i(t))^T.p_{x,i}(t)}{\left\| g(x_i(t))^T.p_{x,i}(t)\right\|}$$

$$\beta_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho_i(t) < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \rho_i(t) > 0 \\ z \in [0,1] & \text{si} \quad \rho_i(t) = 0 \end{cases}$$

$$\rho_i(t) = \frac{\left\| g(x_i(t))^T.p_{x,i}(t)\right\|}{m_i(t)} + \frac{p_{m,i}(t)}{g_0 Isp}$$

☹ La fonction de tir est non lisse et sa Jacobienne est singulière sur un grand domaine

☹ Difficultés de convergence pour la méthode de Newton

⇨ Nécessité de techniques de lissage

Techniques de résolution (2/4)

$$J_\varepsilon(u_1,\dots u_N) = -\sum_{i=1}^{N} m_i(t_f) \boxed{-\varepsilon \frac{T_{max}}{g_0 Isp} \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_f} F(\|u_i(t)\|)dt} \quad \varepsilon \in \left]0,1\right]$$

Choix de la fonction F (ex): $F(w) = \log(w) + \log(1-w) \quad w \in \left]0,1\right[$

$$\bar{u}_{i,\varepsilon}(t) = -\beta_{i,\varepsilon}(t) \frac{g(x_i(t))^T . p_{x,i}(t)}{\left\| g(x_i(t))^T . p_{x,i}(t) \right\|}$$

$$\boxed{\beta_{i,\varepsilon}(t) = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon - \rho_i(t) + \sqrt{\rho_i(t)^2 + 4\varepsilon^2}}}$$

R. EPENOY, R. BERTRAND : "*New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - Numerical results and statistical interpretation*" Optimal Control Applications and Methods, Vol. 23, No. 4, pp. 171-197, 2002

$\varepsilon_1 = 1 > \varepsilon_2 > \dots \varepsilon_n > 0$ **jusqu'à** $\left| J_{\varepsilon_n}(\bar{u}_{\varepsilon_n}) - J_{\varepsilon_{n-1}}(\bar{u}_{\varepsilon_{n-1}}) \right| \leq (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}).\eta \quad \eta > 0$

Difficultés / solutions (suite)

Certaines conditions terminales sont ‘‘couplantes”
⇨ résolution d’un problème de contrôle de grande taille

Utilisation des principes de décomposition-coordination (cf. G. Cohen)

$$\begin{cases} \mathrm{Min} \quad J(x) & J \in C^1(\Re^n, \Re) \\ \theta(x) = 0 & \theta \in C^1(\Re^n, \Re^m) \end{cases}$$

G. COHEN : *“Décomposition et coordination en optimisation déterministe différentiable et non différentiable*" Thèse de doctorat d’état ès sciences mathématiques, Université de Paris Dauphine, 1984

Exemple: Décomposition par prédiction

$$\begin{cases} \mathrm{Min} \quad K(x) + \langle J'(x_k) - K'(x_k) \,|\, x \rangle + \langle p_k \,|\, (\theta'(x_k) - \Omega'(x_k)).x \rangle \\ \Omega(x) - \Omega(x_k) + \theta(x_k) = 0 \end{cases}$$

Avec des fonctions auxiliaires K et Ω séparables

Techniques de résolution (4/4)

Résumé:

Méthodes de décomposition-coordination ⇨ Schéma de point fixe pour résoudre la CN1 du problème

Difficulté:

☹ Bien choisir les fonctions auxiliaires afin d'assurer la convergence du schéma ☹

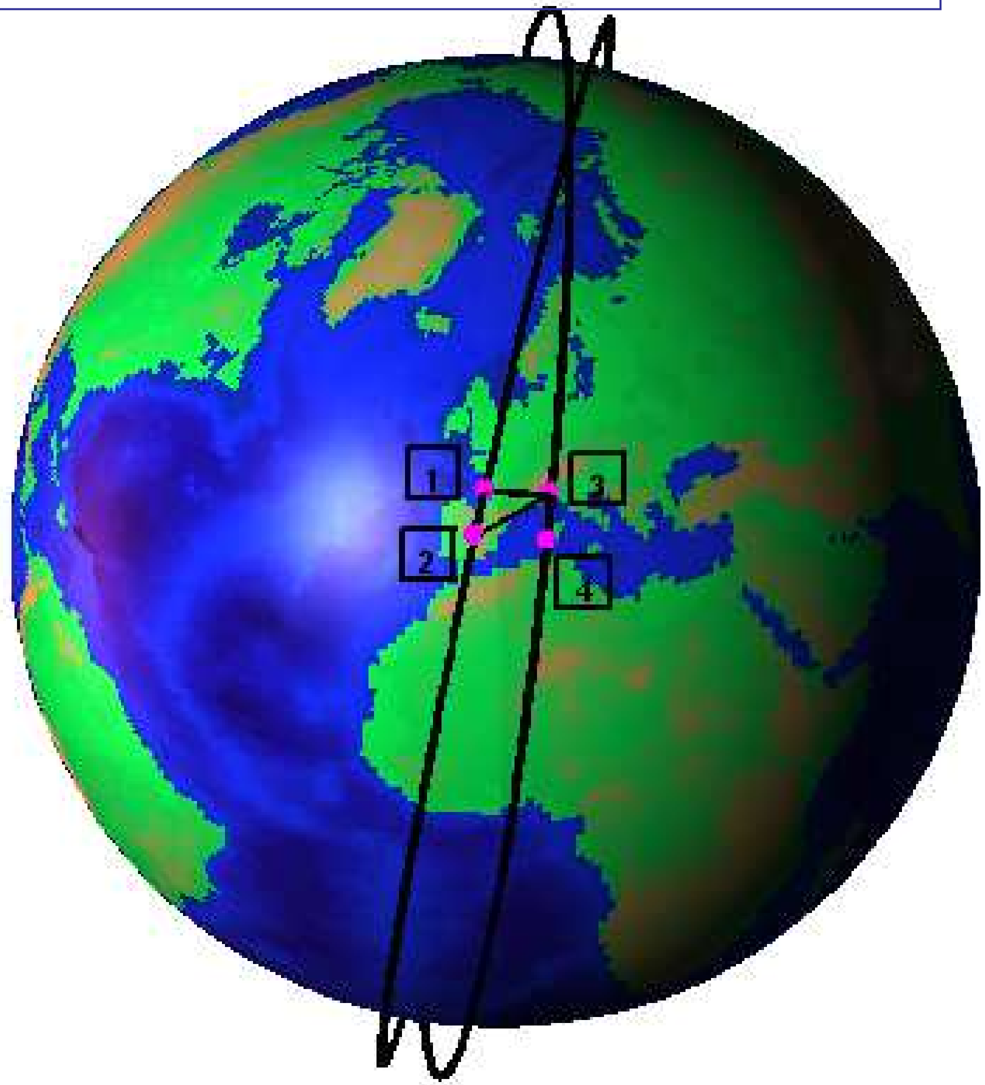
Application au cas du problème de contrôle

Le critère J est séparable ⇨ on peut prendre K = J ⇨ traitement des conditions terminales uniquement

☺ Résolution d'une suite de problèmes de contrôle, chaque problème étant décomposable en N sous problèmes indépendants ☺

☹ Il faut gérer le lissage de la commande en parallèle de la décomposition ⇨ deux niveaux itératifs ☹

Déploiement d'une formation en orbite LEO



Exemple:

N = 4 (3 + 1 satellite redondant)

Deux satellites par plan

Orbites quasi circulaires

Altitude: 650 km

Inclinaison: 98 deg

Distance entre satellites: 300 km à

40 deg de latitude nord

⇨ valeurs de l'écart entre les plans et des déphasages entre satellites

Conclusions

Le vol en formation pose de nouveaux problèmes en mécanique orbitale

⇨ Nécessité de développer de nouvelles méthodes pour l'optimisation des manœuvres

- Objectif: Déterminer les stratégies de déploiement / reconfiguration pour les avant-projets

  ⇨ Utilisation du contrôle optimal

- Difficultés: Problème de grande taille à solution ''bang-bang'' + existence de solutions locales

  ⇨ Nécessité de techniques spécifiques

- Moyens: Post-doc de Jean-Baptiste Thevenet (CNES – AAS)