

Conception optimale de structures

Grégoire Allaire

Ce livre est basé sur le cours éponyme de Grégoire Allaire à l'Ecole Polytechnique. Il présente les fondements mathématiques et numériques des différentes méthodes employées en optimisation de forme, selon que les formes à optimiser sont décrites de manière paramétrique, géométrique ou structurelle. Le livre s'adresse à un public large d'étudiants en mathématiques ou en sciences de l'ingénieur. Les premiers chapitres rappellent des résultats d'analyse fonctionnelle qui rendent la suite très accessible.

L'optimisation de forme est *a priori* un sujet à caractère très applicatif, cependant, certaines difficultés intrinsèques le rendent très riche du point de vue mathématique. Par exemple, de manière générique, un problème d'optimisation de formes est mal posé : l'existence de solutions dans une classe de formes admissibles n'est pas garantie, sauf si l'on contraint les formes à vérifier des conditions de régularité souvent arbitraires. Si l'on arrive à passer cet obstacle, on souhaiterait pouvoir dériver le critère à optimiser pour expliciter des conditions d'optimalité : se pose alors la question de la différentiation par rapport à un ensemble de formes admissibles qui n'a pas forcément de structure d'espace vectoriel. Il se peut également que le critère favorise des formes dont la topologie est singulière, par exemple des formes qui contiennent une infinité de trous infiniment petits. Dans ce cas, le recours à la théorie de l'homogénéisation permet de reformuler le problème d'optimisation pour lui donner une structure mathématique saine, en le transformant en un problème d'optimisation topologique.

Le livre présente ces difficultés et explique leur impact sur les approches numériques du problème. Des exemples détaillés illustrent la non-existence de forme optimale, ou l'apparition d'instabilités numériques. G. Allaire montre ensuite comment l'analyse mathématique permet d'expliquer l'origine de ces difficultés, de les résoudre, et conduit à des algorithmes numériques robustes et efficaces. Ceux-ci sont donnés explicitement et le lecteur est encouragé à réaliser ses propres travaux pratiques en téléchargeant une version FreeFem++ de ces algorithmes sur le site de l'auteur.

De manière plus précise, le livre s'ouvre sur un chapitre introductif qui présente les divers aspects de l'optimisation de forme de modèles mécaniques, un parti pris de l'auteur qui explique que les outils présentés par la suite s'appliquent à des contextes plus généraux (aérodynamique, acoustique, électromagnétisme,...). Trois chapitres sont ensuite consacrés aux bases théoriques sur lesquelles s'appuie l'ouvrage en analyse fonctionnelle, en analyse numérique et en optimisation et à une brève introduction à la théorie du contrôle optimal. Le chapitre 5 entre dans le vif du sujet et présente l'optimisation de formes décrites par un nombre limité de paramètres, à partir d'un domaine fixe. Il aborde alors les problèmes d'existence de solutions avec ou sans contraintes de régularité. Le chapitre 6 est consacré à l'optimisation géométrique de formes et aux techniques de différentiation par rapport au domaine qui permettent d'exprimer des conditions d'optimalité. Les méthodes de gradient de type level set sont évoquées à la fin du chapitre. La partie suivante considère des problèmes où l'on souhaite optimiser également la topologie des formes. Les premiers paragraphes forment une introduction à la théorie des matériaux composites et expliquent pourquoi elle intervient naturellement en optimisation topologique. Le reste du chapitre est consacré à la formulation homogénéisée de l'optimisation, en particulier dans le cas de l'optimisation de la compliance élastique. Enfin, un chapitre portant sur l'optimisation par méthodes évolutionnaires, rédigé par Marc Schonenaus, conclut le livre.

Comme le précise Grégoire Allaire, cet ouvrage se place à un niveau introductif : les aspects mathématiques sont évoqués rigoureusement mais pas exhaustivement et beaucoup d'attention est portée aux applications. Chacun des chapitres est accompagné d'une bibliographie soignée qui pourra facilement guider le lecteur vers les aspects plus techniques. En conclusion, voici un ouvrage très bien écrit et très accessible, qui présente un champ d'investigation très actif (et qui du point de vue de l'impact des maths appliquées, porte à l'optimisme de forme). Bonne lecture.

Eric Bonnetier
Université Joseph Fourier-Grenoble I