

Convergence de schémas numériques pour une équation de conservation avec convection et diffusion dégénérée

Xavier LHEBRARD, Sorbonne Université

Cindy Guichard, Sorbonne Université

Robert Eymard, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Mots-clés : écoulement milieux poreux, équation parabolique dégénérée avec convection, schéma volumes finis, schéma gradient

Dans le but d'optimiser la production d'énergie par géothermie, on souhaite modéliser des écoulements d'eau sous forme liquide ou gazeuse (vapeur d'eau) dans le sous-sol, qui est constitué d'un milieu poreux, hétérogène et anisotrope.

Un modèle simplifié dans ce contexte est une loi de conservation avec un terme de transport linéaire et un terme de diffusion dégénéré [1]. Le terme dégénéré traduit l'absence de diffusion dans les zones d'équilibre des deux phases.

L'approche classique consiste à discrétiser de manière décentrée amont (ordre 1) le terme de convection et de manière centrée le terme de diffusion (ordre 2). Cette approche introduit un excès de diffusion numérique qui est réducteur pour les applications visées.

La nouvelle approche ici est d'utiliser la même discrétisation pour le terme de transport que pour le terme de diffusion. Le terme de transport devient alors centré, et afin de contrôler l'apparition d'oscillations dans certains régimes, le schéma dépend d'un paramètre θ . Si $\theta = 0$ le terme de convection est explicite, si $\theta = 0.5$ le terme de convection est centré en temps, si $\theta = 1$ le terme de convection est implicite.

D'une part on expliquera les difficultés et les arguments trouvés pour démontrer la convergence de la méthode dans le cadre de schéma GDM (Gradient Discretisation Method). Une partie de ces arguments provient du cas sans convection [4].

D'autre part, on montrera le gain en précision de cette méthode pour des simulations 2D sur maillages quelconques, pour la méthode CVFE (Control Volume Finite Element Method) introduite dans [2], et la méthode VAG (Vertex Approximate Gradient Method) introduite dans [3].

Références

- [1] J. BÉNARD, R. EYMARD, X. NICOLAS AND C. CHAVANT. *Boiling in Porous Media: Model and Simulations*, Transport in Porous Media, 60(1):1-31, 2005.
- [2] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallout, C. Guichard, and R. Herbin. *The gradient discretisation method*. Mathématiques et Applications 82. Springer, 2018.
- [3] R. EYMARD, R. HERBIN, C. GUICHARD AND R. MASSON. *Vertex Centred Discretization of Multiphase Compositional Darcy Flows on General Meshes*. Comput. Geosc., 16(4):987-1005, 2012.
- [4] R. EYMARD, P. FÉRON, T. GALLOUËT, R. HERBIN, AND C. GUICHARD. *Gradient schemes for the Stefan problem*. Int. J. Finite Vol., 10, 2013.