Un schéma préservant l'asymptotique pour les équations de Saint-Venant avec terme source de friction de Manning

Christophe Berthon, Marianne Bessemoulin-Chatard, Solène Bulteau

Cette présentation concerne le développement d'un schéma numérique pour les équations de Saint-Venant avec friction de Manning. Ces dernières, utilisées dans la modélisation d'écoulements 1D en eau peu profonde avec friction du fond du canal, sont gouvernées par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2} \right) = -kq|q|h^{-\eta}. \end{cases} \tag{1}$$

Les inconnues impliquées sont la hauteur d'eau $h(t,x)$ strictement positive et le débit $q(t,x)$. Les paramètres du modèle sont la constante de gravité g, le coefficient de Manning k et le paramètre η, en géneral égal à 7/3.

La propriété recherchée dans la construction de schémas numériques pour (1) est celle dite d'asymptotic preserving, c'est à dire que les discrétisations doivent garder un bon comportement dans l'asymptotique du modèle (1). Plus précisément, nous nous intéressons aux solutions du problème en temps long et friction dominante. Pour le modéliser, nous procédons à un rescaling de (1) en utilisant un petit paramètre ε de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t h + \partial_x q = 0, \\ \varepsilon \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2} \right) = -\dfrac{k}{\varepsilon^2} q|q|h^{-\eta}. \end{cases} \tag{2}$$

Formellement, en se servant d'un développement de Chapman-Enskog sur les solutions de (2) dans la limite de ε tend vers zéro, h satisfait l'équation parabolique très non-linéaire suivante :

$$\partial_t h + \partial_x \left(-\mathrm{sign}\,(\partial_x h) \sqrt{\frac{h^\eta}{k} \left| \partial_x \frac{gh^2}{2} \right|} \right) = 0. \tag{3}$$

L'objectif de ce travail est de développer une méthode numérique qui dégénère vers une discrétisation de la limite diffusive (2) quand ε tend vers zéro. Dans cette présentation, nous présentons l'extension à ce problème de la technique proposée par Berthon et Turpault dans [1]. Cette méthode s'appuie sur l'introduction d'un paramètre supplémentaire, jouant le rôle de degré de liberté, dans un schéma HLL modifié pour contenir la discrétisation du terme source. Ce paramètre est ensuite fixé pour que le schéma capture une discrétisation choisie de la limite de diffusion (3). La difficulté majeure dans l'application de cette méthode aux équations de Saint-Venant réside dans la forme quadratique en q du terme source, qui induit un opérateur de dérivée très non-linéaire dans l'équation de diffusion.

Références

[1] Christophe Berthon et Rodolphe Turpault, *Asymptotic preserving HLL schemes*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 2011.