

# Simulation exacte du temps nécessaire à une diffusion pour sortir d'un intervalle

**Samuel HERRMANN**, Université de Bourgogne

**Cristina ZUCCA**, Université de Turin, Italie.

Les diffusions (famille de solutions d'équations différentielles stochastiques) jouent un rôle primordial en modélisation stochastique avec de nombreux champs d'application. Il est donc essentiel de pouvoir simuler précisément les trajectoires de ces processus et toute variable aléatoire qui y serait liée. Dans cette communication, nous nous intéresserons en particulier au premier instant de sortie d'un intervalle donné. Nous considérons donc  $(X_t)$  la solution de

$$dX_t = \mu(X_t) dt + dB_t, \quad X_0 \in ]a, b[, \quad t \geq 0,$$

où  $(B_t)$  est un mouvement brownien et l'objectif se résume à la simulation numérique de

$$\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin ]a, b[\}.$$

Cette variable aléatoire dépend de la trajectoire du processus et non simplement d'une marginale à un temps fixé, ce qui rend plus compliquée sa simulation numérique. Une première approche consiste à introduire des schémas numériques basés sur la discrétisation temporelle. Ces schémas permettent d'obtenir un squelette de la diffusion et d'en déduire une approximation du temps de sortie. Une autre façon d'appréhender le problème de simulation est d'utiliser une méthode de rejet pour simuler directement et de façon exacte le temps de sortie.

Les avantages de cette seconde méthode sont essentiellement de deux types : premièrement nous évitons de simuler toute la trajectoire, ce qui représente beaucoup d'information inutile si l'objet d'étude est réduit à l'analyse du temps de sortie. Par ailleurs, l'algorithme présenté dans cette communication n'introduit aucune erreur d'approximation. Pour que l'algorithme de rejet soit bien pertinent il faut évidemment parler d'efficacité par la présentation de résultats théoriques d'un côté et de résultats numériques basés sur des exemples d'un autre côté.

Une première étude sur la simulation exacte notamment des marginales de diffusion fut introduite par Beskos et Roberts [1] puis complétée par différents travaux par la suite [2]. En ce qui concerne les temps d'arrêt, nous avons étudié dans un premier temps les premiers instants de passage des diffusions [3] avant de nous intéresser aux temps de sortie dont la complexité (au niveau des algorithmes) est bien supérieure.

## Références

- [1] A. BESKOS AND G.O. ROBERTS, *Exact simulation of diffusions*, The Annals of Applied Probability, 15(4), 2005.
- [2] A. BESKOS, O. PAPASPILIOPOULOS AND G.O. ROBERTS, *Retrospective exact simulation of diffusion sample paths with applications*, Bernoulli, 12(6), 2006.
- [3] S. HERRMANN AND C. ZUCCA, *Exact simulation of the first-passage time of diffusions*, Journal of Scientific Computing, 2019.

**Samuel HERRMANN**, Institut de Mathématiques de Bourgogne, 9 av. Alain Savary - BP.47 870, 21078 Dijon  
Samuel.Herrmann@u-bourgogne.fr

**Cristina ZUCCA**, University of Torino, Via Carlo Alberto 10, 10123 Turin, Italy  
cristina.zucca@unito.it