Transport optimal et discrétisations particulaires d'équations d'évolution

Quentin Mérigot, LMO, Université Paris-Sud

Dans cet exposé, nous montrerons comment construire des discrétisations particulaires (lagrangiennes) de plusieurs équations d'évolution : l'équation d'Euler pour les fluides incompressibles, l'équation d'Euler isentropique, l'équation de Fokker-Planck linéaire et un modèle de mouvement de foule proposé par Maury, Roudneff-Chupin et Santambrogio [3]. Dans ce dernier modèle, la foule est représentée par une densité de probabilité sur un domaine du plan ; son mouvement suit un champ de vecteurs (typiquement l'opposé du gradient d'une fonction distance) mais est contraint par une congestion "dure" (la densité doit rester bornée par une constante). Ces quatre modèles ont une interprétation variationnelle. Par exemple, l'équation de Fokker-Planck [2] et celle des foules [3] peuvent être obtenues comme flot-gradient des énergies

$$\mathcal{E}(\rho) = \int \rho V + \rho \log \rho \qquad\qquad \mathcal{E}(\rho) = \begin{cases} \int \rho V & \text{si } \rho \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

dans l'espace des densités de probabilité munies de la distance de Wasserstein. Pour les équations d'Euler, l'interprétation variationnelle utilisant le transport optimal est due à Brenier [1]. L'objectif de l'exposé est de présenter une discrétisation lagrangienne de ces équations sous la forme de systèmes de particules, en considérant l'évolution d'une mesure de probabilité de la forme $\mu(t) = \frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq N} \delta_{x_i(t)}$. Comme les énergies $\mathcal{E}$ valent $+\infty$ sur les mesures non absolument continues, nous approchons ces énergies $\mathcal{E}$ par leur régularisée de Moreau-Yosida $\mathcal{E}_\varepsilon$ dans l'espace de Wasserstein. Ceci a pour effet de traduire la contrainte de congestion ou le terme de diffusion en une interaction entre particules $x_i(t)$, dans laquelle le graphe d'interaction dépend de manière complexe de la position des particules. La construction de ces schémas et leur implémentation numérique reposent sur des outils de transport optimal numérique récents, dans leur variante "semi-discrète". Les résultats présentés sont issus de travaux avec Thomas Gallouët [4] et Hugo Leclerc, Filippo Santambrogio et Federico Stra [5].

Références

[1] Y. Brenier, *The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids*, Journal of the American Mathematical Society **2**, 1989.

[2] R. Jordan, D. Kinderlehrer, F. Otto, *The variational formulation of the Fokker–Planck equation*, SIAM journal on mathematical analysis, **29**(1), 1998.

[3] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio, *A macroscopic crowd motion model of gradient flow type*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **20** (10), 2010.

[4] T. O. Gallout, Q. Mérigot, *A Lagrangian scheme à la Brenier for the incompressible Euler equations*, Foundation of Computational Mathematics, **18** (4), 2018

[5] H. Leclerc, Q. Mérigot, F. Santambrogio, F. Stra, *Lagrangian discretization of crowd motion and linear diffusion*, *en préparation*

Quentin Mérigot, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud
`quentin.merigot@math.u-psud.fr`