

Analyse numérique d'une méthode éléments finis pour les écoulements à surface libre

Emmanuel Audusse, Université Paris 13

Gabriel Barrenechea, University of Strathclyde

Astrid Decoene, Université Paris Sud

Pierrick Quemar, Université Paris 13, EDF R&D

Mots-clés : équations de Navier–Stokes à surface libre, méthode des éléments finis, analyse numérique

Nous nous intéressons à la modélisation d'écoulements environnementaux régis par les équations de Navier–Stokes à surface libre. Pour cela, nous considérons un fluide newtonien et homogène (de densité constante ρ) soumis à la force de gravité $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ et nous supposons un écoulement incompressible. À chaque temps $t \in]0, T[$ avec $T \in \mathbb{R}^{*,+}$, le domaine mobile tridimensionnel du fluide Ω_t est défini par :

$$\Omega_t = \{(x, y, z)^T \mid (x, y)^T \in \omega \text{ et } b(x, y) < z < \eta(x, y, t)\}, \quad (1)$$

avec ω un domaine fixe bidimensionnel, $b(x, y)$ la topographie du fond et $\eta(x, y, t)$ l'élévation de surface libre. Les équations de Navier–Stokes à surface libre s'écrivent sous formulation ALE :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\hat{\Omega}} + ((\mathbf{u} - \mathbf{c}) \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{g}, & \text{sur } \Omega_t \times]0, T[, \quad (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \Omega_t \times]0, T[, \quad (3) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u}_{|_{z=\eta}}^{hor} \cdot \nabla_{hor} \eta = w_{|_{z=\eta}}, & \text{sur } \omega \times]0, T[. \quad (4) \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{hor}, w)^T$ la vitesse du fluide, \mathbf{c} la vitesse du domaine, p la pression et ν la viscosité cinématique. Précisons que l'équation (4) représente la condition cinématique à la surface libre.

Une difficulté de la résolution numérique de ce problème réside dans le fait que l'élévation de surface libre est une inconnue, celle-ci définissant le mouvement du domaine. Une stratégie numérique [?] consiste à convecter la surface libre, mettre à jour le domaine et résoudre ensuite les équations de Navier–Stokes. La conservation de la masse d'eau étant une propriété importante, nous présenterons et analyserons un schéma éléments finis explicite d'ordre 1 en temps avec un terme de stabilisation symétrique [?], pour l'équation cinématique de surface libre, permettant de satisfaire globalement cette propriété. Nous montrerons que ce schéma est stable sous condition CFL. Par ailleurs, inspiré de l'étude de stabilité pour des problèmes ALE dépendant du temps [?], nous proposerons une nouvelle formulation variationnelle associée aux équations de Navier–Stokes permettant d'aboutir à un schéma éléments finis semi-implicite en temps, qui est stable indépendamment de la vitesse du domaine et d'une vitesse de convection à divergence nulle exacte. Des cas tests numériques effectués avec cette méthode seront présentés et comparés à d'autres méthodes de résolution numérique.