ϕ-FEM: une méthode élément finis sur des domaines définis par des fonctions Levelset

Michel DUPREZ, Laboratoire Jacques-Louis Lions

Alexei LOZINSKI, Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Dans cette exposé, nous considérerons l'équation de Poisson avec conditions au bord Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) de bord régulier Γ. Nous supposerons que Ω et Γ sont définis par une fonction Levelset ϕ régulière:

$$\Omega := \{\phi < 0\} \text{ et } \Gamma := \{\phi = 0\}.$$

Nous proposons dans notre travail (cf [3]) une méthode éléments finis pour ce problème qui peut être facilement implémentée et qui ne requière pas de maillage coïncidant avec Γ. Nous idée est très simple: nous n'imposons pas les conditions au bord au sens usuel, mais nous cherchons une approximation de u qui est le produit d'une fonction éléments finis w_h avec la fonction Levelset ϕ (un tel produit s'annulera naturellement sur Γ). Nous avons appelé notre méthode ϕ-FEM en concordance avec la notation traditionnelle des fonctions Levelset par ϕ.

Notre méthode partage certaines caractérisques avec des méthodes éléments finis sur des maillages non-conformes tels que XFEM ou CutFEM (cf e.g. [1], [2]). Contrairement à ces stratégies, ϕ-FEM ne nécessite pas d'intégration sur des courbes ou sur une partie des éléments du maillage. De plus, notre technique a été développée pour des éléments finis P_k d'ordre $k \geq 1$.

La stratégie ϕ-FEM consiste à approcher la solution du système (1) par la solution de la formulation éléments finis suivante : trouver w_h dans l'espace standard éléments finis continus P_k tel que:

$$\int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h w_h) \cdot \nabla(\phi_h v_h) - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h)\phi_h v_h + G_h(w_h, v_h) = \int_{\Omega_h} f\phi_h v_h + G_h^{rhs}(v_h), \tag{2}$$

pour toute w_h fonction éléments finis continus P_k, où ϕ_h est une approximation éléments finis de ϕ, Ω_h une extension de Ω et G_h, G_h^{rhs} représentent des termes de stabilisation. Nous approcherons donc u par $u_h := w_h\phi_h$.

Sous certaines hypothèses de régularités des données, nous montrons que la méthode satisfait les ordres optimaux h^k pour l'erreur dans la norme H^1. De plus, les termes de stabilisation assurent un bon conditionnement de la matrice éléments finis associée. Nous terminerons par quelques illustrations numériques de l'efficacité de la méthode.

Références

[1] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, *A finite element method for crack growth without remeshing*, International journal for numerical methods in engineering, 46(1):131150, 1999.

[2] E. Burman, S. Claus, P. Hansbo, M. G. Larson, and A. Massing, *Cutfem: discretizing geometry and partial differential equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 104(7):472501, 2015.

[3] M. Duprez, A. Lozinski, *ϕ-FEM: a finite element method on domains defined by levelsets*, En préparation.

Michel DUPREZ, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris
mduprez@math.cnrs.fr
Alexei LOZINSKI, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université de Bourgogne Franche-Comté, 16 route de Gray, 25000 Besançon
alexei.lozinski@univ-fcomte.fr