Oscillations en temps long des solutions mesures de l'équation de la mitose dans un cas critique

Hugo MARTIN, Sorbonne Université

Gabriel PIERRE, Université de Versailles

Mots-clés : dynamique des populations, éléments propres principaux, comportement asymptotique, solution oscillante, analyse de Fourier

On s'intéresse ici à l'équation de la mitose avec croissance exponentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}n(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}(xn(t,x)) + B(x)n(t,x) = 4B(2x)n(t,2x), \quad t > 0,\ x > 0, \tag{1}$$

avec la condition initiale $n(0,x) = n_0(x)$ pour $x > 0$. Les équations de dynamique des populations, dont (1) fait partie, ont déjà fait l'objet de nombreux travaux, tant pour l'existence et l'unicité d'une solutions que pour leur comportement en temps long, dans un cadre L^p (voir par exemple [1]). La démarche usuelle est de prouver l'existence et l'unicité d'un vecteur propre au problème de Perron, puis de montrer que toute solution de l'équation d'évolution, à une renormalisation exponentielle en temps près, converge vers ce vecteur propre.
En parallèle, le concept de solution mesure d'une équation de dynamique des population a connu un intérêt croissant. Ce type de solution permet de prendre en compte des conditions initiales masses de Dirac, qui ont une interprétation biologique assez claire : ce sera la situation d'une culture cellulaire initialisée avec une unique cellule. Dans [2], les auteurs ont montré la convergence forte de la solution mesure vers le vecteur propre dominant multiplié par la mesure de Lebesgue. Ce résutlat tient pour une grande variété de pramètres, mais pas pour (1). Un résultat similaire a été prouvé dans [3] pour l'équation de McKendrick-von Foester.
Récemment, le comportement asymptotique oscillant de (1) a été prouvé dans un cadre L^2 dans [4]. La fonction limite est une série indexée par $\mathbb{Z}$, qui correspond ła projection de la condition initiale sur l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres de partie réelle égale à 1. On se demande donc naturellement ce qu'il advient d'une solution mesure de (1) en temps long.
Pour répondre à cette question, on commence par résoudre l'équation adjointe de (1). Avec la solution ainsi obtenue, on construit par dualité une solution mesure au problème direct. Enfin, le comportement asymptotique de cette solution est déduit de celui de la solution du problème adjoint, pour lequel on dispose de théorèmes.

Références

[1] Benoit Perthame, *Transport equations in biology*, Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[2] Tomasz Debiec, Marie Doumic, Piotr Gwiazda, Emil Wiedemann, *Relative Entropy Method for Measure Solutions of the Growth-Fragmentation Equation*, SIAM J. Math. Anal., 50(6), 58115824, 2018.

[3] Pierre Gabriel, *Measure solutions to the conservative renewal equation*, ESAIM: proceedings and surveys, 62, 68-78 2018.

[4] Étienne Bernard, Marie Doumic, Pierre Gabriel, *Cyclic asymptotic behaviour of a population reproducing by fission into two equal parts*, Kinetic Related Models, to appear, arXiv:1609.03846.

Hugo MARTIN, Sorbonne université, Laboratoire Jacques-Louis Lions, LJLL, F-75005 Paris
`martin@ljll.math.upmc.fr`
Gabriel PIERRE, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 45 Avenue des États-Unis, 78035 Versailles
`pierre.gabriel@uvsq.fr`