Éléments finis de frontière sur des domaines singuliers

Martin AVERSENG, CMAP, École Polytechnique

Mots-clés : Éléments finis de frontière, Préconditionnement, Singularités.

Les éléments finis de frontière sont une méthode numérique largement utilisée pour résoudre les porblèmes de diffraction d'une onde (acoustique, élastique, éléctromagtique...) par un objet $\mathcal{O}$. Ces problèmes trouvent de nombreuses applications industrielles. Pour calculer le champ diffracté u_d définit sur le **domaine volumique non borné** $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$, on résout une équation dite intégrale de la forme

$$\forall x \in \partial\mathcal{O}, \quad \int_{\mathcal{O}} G(x,y)\lambda(y)d\sigma(y) = u_{\text{inc}}(x)$$

dont l'inconnue λ est une fonction définie sur un **domaine surfacique borné**: la frontière de l'objet diffractant. La solution u_d est ensuite donnée par $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}, \quad u_d(x) = \mathcal{F}\lambda(x)$ où $\mathcal{F}\lambda(x)$ est une fonction que l'on peut évaluer rapidement une fois que λ a été déterminé. Cette approche permet ainsi de réduire considérablement la taille du maillage utilisé pour discrétiser le problème, et donc le nombre d'inconnues dans le système linéaire qui en résulte. En contrepartie, la matrice du système est **dense**, et il est donc difficile de l'inverser directement dans les applications intéressantes. L'approche la plus répandue consiste à résoudre le système par une méthode itérative de type Krylov, dont la complexité dépend de manière cruciale du conditionnement du système. Lorsque l'objet diffractant a une géométrie régulière, de bonnes stratégies de préconditionnement sont connues pour réduire le nombre d'itérations, ce qui fait que cette approche se révèle particulièrement compétitive.

Malheureusement, dans beaucoup d'applications réelles, l'hypothèse d'une géométrie régulière n'est pas satisfaite. Par exemple, pour le problème du radar, l'objet diffractant est un avion, dont les ailes présentent des bords en lesquels la courbure est très grande. En présence de telles singularités géométriques, deux difficultés apparaissent dans la méthode décrite précédemment.

(i) Au voisinage des singularités géométriques, l'inconnue λ est singulière. Ceci se traduit numériquement par des taux de convergence en maillage sévèrement dégradés.

(ii) Les approches connues pour construire de bons préconditionneurs s'effondrent car elles utilisent de manière essentielle la régularité de la frontière de l'objet.

À ce jour, il n'existe pas de méthode qui remédie simultanément aux deux points ci-dessus. En particulier, un raffinement de maillage près de la singularité, s'il permet de retrouver un bon taux de convergence en maillage, mène à des systèmes linéaires catastrophiquement mal conditionnés.

Dans notre exposé, nous décrivons un cadre thorique et numérique qui permet de résoudre ces deux difficultés, en combinant plusieurs idées apparues récemment dans la littérature [1, 2, 3]. L'approche passe par l'introduction d'opérateurs intégraux "à poids", d'un maillage raffiné (d'une manière explicite) et par des préconditionneurs construits à l'aide d'un nouveau calcul pseudo-diffŕentiel sur ces géométries singulières, généralisant l'approche de [4].

Références

[1] O. P. Bruno and S. K. Lintner. Second-kind integral solvers for TE and TM problems of diffraction by open arcs. *Radio Science*, 47(6), 2012.

[2] R. Hiptmair, C. Jerez-Hanckes, and C. A. Urzúa Torres. Closed-form exact inverses of the weakly singular and hypersingular operators on disks. *arXiv preprint arXiv:1703.08556*, 2017.

[3] P. Ramaciotti and J.-C. Nédélec. About some boundary integral operators on the unit disk related to the laplace equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(4):1892–1914, 2017.

[4] X. Antoine and M. Darbas. Generalized combined field integral equations for the iterative solution of the three-dimensional helmholtz equation. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(1):147–167, 2007.

Martin AVERSENG, CMAP, École Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau
`martin.averseng@polytechnique.edu`