Un algorithme de Schwarz sans recouvrement pour le problème de Navier-Stokes avec discrétisation DDFV

Thierry GOUDON, Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, LJAD

Stella KRELL, Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, LJAD

Giulia LISSONI, Université Côte d'Azur, Inria, CNRS,LJAD

Mots-clés : Domain decomposition, Schwarz algorithm, DDFV, Navier-Stokes

Nous nous sommes intéeressés à la méthode de Schwarz sans recouvrement pour le problème de Navier-Stokes incompressible:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) = 0; & \text{dans} \quad \Omega \times [0, T], \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times [0, T], \end{cases} \tag{1}$$

avec $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega \times [0, T]$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{init}$ dans Ω, et $\sigma(\mathbf{u}, p) = \frac{2}{\mathrm{Re}}\mathrm{D}\mathbf{u} - p\mathrm{Id}$, $\mathrm{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} +^t \nabla \mathbf{u})$.
Au cours des dernières années, les méthodes de Schwarz classiques et optimisées ont été développées pour des problèmes elliptiques anisotropes discrétisées à l'aide des méthodes DDFV (Discrete Duality Finite Volume), voir [1], [2]. L'avantage des schémas DDFV, qui ont été étudiés dans [4], est de pouvoir travailler sur des maillages très généraux, ne vérifiant pas nécessairement la condition d'orthogonalité classique des maillages volumes finis. Sur ces maillages, les inconnues sont décalées : la vitesse $\mathbf{u}^{\mathfrak{T}}$ est approchée simultanément aux centres et aux sommets des mailles du maillage initial, et la pression $p^{\mathfrak{D}}$ sur les arêtes du maillage initial. En [3], un schéma DDFV a été proposé pour le probléme de Navier-Stokes avec des conditions aux bords ouvertes.
Dans le travail qu'on présente, on écrit Ω comme l'union de deux sous-domaines Ω_j, $j = 1, 2$ qui partagent une interface Γ, sans recouvrement. Comme dans le cas des méthodes de Galerkin discontinues, la discrétisation appropriée des conditions de transmission à l'interface à l'aide de DDFV n'est a priori pas évidente. Nous proposons un algorithme de Schwarz dans le formalisme DDFV. Les conditions de transmission sur l'interface Γ pour calculer l'iteration $l + 1$ sur Ω_j, pour $j = 1, 2$, étant donné $(\mathbf{u}_i^l, p_i^l)$, $i \neq j$ et $l \in \mathbb{N}$, sont de la forme:

$$\sigma(\mathbf{u}_j^{l+1}, p_j^{l+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_j - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j^{l+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_j)(\mathbf{u}_j^{l+1}) + \lambda \mathbf{u}_j^{l+1} = -\sigma(\mathbf{u}_i^l, p_i^l) \cdot \vec{\mathbf{n}}_i + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^l \cdot \vec{\mathbf{n}}_i)(\mathbf{u}_i^l) + \lambda \mathbf{u}_i^l,$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_j^{l+1}) + \alpha p_j^{l+1} = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_i^l) + \alpha p_i^l,$$

oú $\vec{\mathbf{n}}_j$ est la normale unitaire sortante de Ω_j, $\lambda, \alpha > 0$. On discretise (1) avec un schéma de type Euler semi-implicite en temps, et à chaque itération on applique l'algorithme de Schwarz décrit ci-dessus au systeme linéaire resultant. Nous montrons également la convergence de cet algorithme et nous terminons par des expériences numériques.

Références

[1] M. Gander, F. Hubert, S. Krell, *Optimized Schwarz Algorithms for Anisotropic Elliptic Operators in the Framework of DDFV Schemes*, Proceedings of the 21st International Conference on Domain Decomposition Methods (Rennes, France), 2012

[2] M. J. Gander, L. Halpern, F. Hubert, S. Krell, *Optimized Schwarz Methods for Anisotropic Diffusion with Discrete Duality Finite Volume Discretizations*, soumis, 2018.

[3] T. Goudon, S. Krell, G. Lissoni, *DDFV method for Navier-Stokes problem with outflow boundary conditions*, Numerische Matematik, 2018.

[4] K. Domelevo et P. Omnes, *A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids*, M^{2}AN, 39, n.6, pp. 1203-1249, 2005.

Giulia LISSONI, Université Côte dAzur, Inria, CNRS, LJAD, Parc Valrose, 06108 Nice, France
giulia.lissoni@univ-cotedazur.fr
Stella KRELL, Université Côte dAzur, Inria, CNRS, LJAD, Parc Valrose, 06108 Nice, France
stella.krell@univ-cotedazur.fr
Thierry GOUDON, Université Côte dAzur, Inria, CNRS, LJAD, Parc Valrose, 06108 Nice, France
thierry.goudon@inria.fr