Turnpike en optimisation de forme

Gontran LANCE, Sorbonne Université

Nous proposons ici une présentation du phénomène de turnpike en contrôle optimal dans le cadre de l'optimisation de formes dépendantes du temps.
Considérant un temps final $T > 0$ très grand et le problème de déterminer un domaine dépendant du temps $t \to \omega(t)$ (vu comme un contrôle) minimisant le coût

$$J_T(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T f^0\big(y(t),\omega(t)\big)\,dt + g\big(y(T),\omega(T)\big) \tag{1}$$

sous les contraintes

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t),\omega(t)\big) \text{ et } R\big(y(0),y(T)\big) = 0 \tag{2}$$

on lui associe alors un problème dit statique

$$\min_{\omega} f^0(y,\omega), \quad f(y,\omega) = 0 \tag{3}$$

Ainsi, dans la continuité des travaux sur le turnpike en contrôle optimal en dimension finie et infinie [1, 2, 3, 4], on s'attend à ce qu'une solution optimale de (1) reste, la plupart du temps, proche d'une solution (stationnaire) du problème statique (3).
Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, y_0 et $y_d \in L^2(\Omega), L \in (0,1)$ nous nous intéressons particulièrement à l'équation de la chaleur et au problème ci-dessous de trouver la forme optimale d'un terme source dépendant du temps et minimisant la distance à une fonction de température donnée

$$\min_{|\omega(\cdot)|\le L|\Omega|} \frac{1}{T}\int_0^T \|y(t)-y_d\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} - \triangle y = \chi_{\omega(\cdot)}, \quad y_{|\partial\Omega} = 0, \quad y(0) = y_0 \tag{4}$$

On démontre, sous certaines hypothèses, l'existence d'une solution optimale unique (ainsi que pour le problème statique associé). Ensuite, soit avec des arguments de dissipativité stricte à l'instar de [3] soit avec un calcul explicite analogue à [1, 2] nous sommes en mesure d'établir des propriété de turnpike similaires.
Nous adoptons par la suite une approche plus numérique du problème et proposons plusieurs simulations de (4) (en 2D et 3D) et qui mettent en exergue la propriété de turnpike exponentiel définie dans [4].
Ceci est un travail en cours dans le cadre de ma thèse se déroulant sous la direction de Emmanuel Trélat et Enrique Zuazua.

Références

[1] Porretta, Alessio and Zuazua, Enrique, *Long time versus steady state optimal control*, SIAM J. Control Optim., 2013.

[2] Porretta, Alessio and Zuazua, Enrique, *Remarks on long time versus steady state optimal control*, Mathematical paradigms of climate science, Springer, 2016.

[3] Trélat, Emmanuel and Zhang, Can, *Integral and measure-turnpike properties for infinite-dimensional optimal control systems*, Math. Control Signals Systems, 2018.

[4] Trélat, Emmanuel and Zuazua, Enrique, *The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control*, J. Differential Equations, 2015.

Gontran LANCE, Sorbonne Université, Laboratoire Jacques Louis Lions, 4 place Jussieu - 75005 Paris
`lance@ljll.math.upmc.fr`