Contrainte de convexité en optimisation de forme

Jimmy LAMBOLEY, Sorbonne université

Ilias FTOUHI, Sorbonne université

Arian NOVRUZI, University of Ottawa

Michel PIERRE, ENS Rennes

On s'intéresse dans cet exposé à la contrainte de convexité dans le calcul de variations, et plus généralement en optimisation de forme. Un modèle rentrant dans cette formulation apparait dès le 17e siècle dans les travaux de Newton, qui cherchait la forme d'un objet, en mouvement à vitesse constante dans l'air, de sorte à minimiser sa résistance. Pour des raisons de modélisation, il se restreignait à des objets qui sont le sous-graphe d'une fonction $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+$ concave (où $\mathbb{D}$ est le disque unité de $\mathbb{R}^2$). Le problème s'écrit alors simplement

$$\min \left\{ \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1 + |\nabla u(x)|^2} dx, \quad u : \mathbb{D} \to [0, M] \text{ concave} \right\} \tag{1}$$

où la contrainte M modélise une "hauteur" maximale pour l'objet. Malgré la non-convexité de cette énergie, il y a bien une solution optimale à ce problème. Newton avait identifié la meilleure solution parmi les domaines à symétrie de rotation, c'est à dire représentés par des fonctions radiales. Il faut attendre la fin du 20e siècle pour découvrir que la solution de Newton n'est pas optimale parmi les objets sans symétrie à priori, autrement dit que les solutions du problème (1) ne sont pas radiales, voir [1].
Plus généralement, on peut formuler un problème d'optimisation de forme sous contrainte de convexité :

$$\min \{J(\Omega), \ \ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ \ \Omega \text{ convexe}\} \tag{2}$$

où J est une fonctionnelle de forme dont la variable est un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, demandé ici à être convexe. De nombreux problèmes rentrent dans cette formulation ; parmi les plus connus, on peut citer la conjecture de Mahler (le simplexe minimise-t-il le produit volumique parmi les convexes de $\mathbb{R}^n$?) ou la conjecture de Pólya-Szegö qui établit une inégalité optimale entre la capacité de Ω convexe de $\mathbb{R}^3$ et la surface de son bord. On donnera des conditions générales sur J qui amènent les solutions de (2) à "saturer" la contrainte de convexité, et qui dans le cas de la dimension 2 donnent des solutions optimales polygonales, voir [2, 3]. On conclura sur l'importance des résultats précédents pour des questionnements plus récents, notamment dans l'étude des diagrammes de Blaschke-Santaló, qui visent à décrire toutes les inégalités possibles faisant intervenir un triplet (J_1, J_2, J_3) de fonctionnelles de forme dans la classe des convexes. On précisera un exemple issu de la théorie spectrale du Laplacien, en décrivant l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \exists\Omega \text{ convexe de } \mathbb{R}^2, \ P(\Omega) = x, \ \ \lambda_1(\Omega) = y, \ \ |\Omega| = 1\}$$

où $|\Omega|$ désigne l'aire de Ω, $P(\Omega)$ est son périmètre, et $\lambda_1(\Omega)$ est la valeur propre principale du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$, qui correspond au diagramme de Blaschke-Santalo du triplet $(\lambda_1, P, |\cdot|)$. Il s'agit d'un travail en cours avec I. Ftouhi [4].

Références

[1] Brock, F. - Ferone, V. - Kawohl, B., *A Symmetry Problem in the Calculus of Variations*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 1996.

[2] Lamboley, J. - Novruzi, A. - Pierre, M., *Estimates of First and Second Order Shape Derivatives in Nonsmooth Multidimensional Domains and Applications*, Journal of functional analysis, 2016

[3] Lamboley, J. - Novruzi, A. - Pierre, M., *Regularity and singularities of optimal convex shapes in the plane*, ARMA, 2012

[4] Ftouhi, I. - Lamboley, J., *Blaschke-Santalo diagram for perimeter and Dirichlet eigenvalue*, en préparation, 2019

Jimmy LAMBOLEY, Sorbonne université, IMJ-PRG, 4 place de Jussieu, 75252 Paris
jimmy.lamboley@imj-prg.fr
Ilias FTOUHI, Sorbonne université, IMJ-PRG, 4 place de Jussieu, 75252 Paris
ilias.ftouhi@imj-prg.fr
Arian NOVRUZI, University of Ottawa, Department of Mathematics and Statistics, 150 Louis-Pasteur, Ottawa, ON, Canada K1N 6N5
novruzi@uOttawa.ca
Michel PIERRE, ENS Rennes, Avenue Robert Schumann, 35170 BRUZ
Michel.Pierre@ens-rennes.fr