Estimations maximales pour l'opérateur de Fokker-Planck avec champ magnétique

Zeinab Karaki, Université de Nantes

Mots-clés : équation de Fokker-Planck; champ magnétique; estimation maximale; hypoellipticité maximale.

L'équation de Fokker-Planck est une équation cinétique, qui modélise la dynamique d'un système de particules chargées en supposant qu'elles subissent des chocs modélisés par le noyau de collision de Fokker-Planck et sous l'action d'une force extérieure $\mathcal{F}$, est décrit comme suit :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \mathcal{F}(t,x)\nabla_v f = \nabla_v \cdot (\nabla_v + v)f, \tag{1}$$

L'effet des collisions va amener la distribution $f(t,x,v)$ vers la maxwellienne μ avec le temps, où μ répresente l'état d'équilibre global du système des particules.

Ces dernières années, les estimations hypoelliptiques globales ont connu une renaissance en liaison avec des questions provenant de la théorie cinétique des gaz. Dans cette direction de nombreux auteurs ont démontré des estimations maximales pour aborder la question du retour à l'équilibre μ. F. Hérau et F. Nier dans l'article [2] ont mis en évidence les liens entre l'opérateur de Fokker-Planck avec un potentiel de confinement V, où $\mathcal{F} = \nabla_x V$, et le Laplacian de Witten associé. Ces travaux ont été complétés et expliqués de manière générale dans le livre de B. Helffer et F. Nier [1], .

Dans cet exposé, nous poursuivrons l'étude du cas modèle de l'opérateur de Fokker-Planck avec un champ magnétique extérieur B_e (autrement dit, la force $\mathcal{F} = v \wedge B_e$ représente la force magnétique ou de Lorentz), commencée dans [3] et établissons une estimation de type maximale pour ce modèle, donnant une caractérisation du domaine de son extension fermée. Cela nous permet en particulier d'obtenir la régularité dans des variables vitesses.

Dans cet exposé, nous commencerons par introduire la notion d'opérateur hypoelliptique maximal. Nous montrerons une estimation de type maximale sur cet opérateur en utilisant une approche nilpotente pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs, en tout point $x \in \mathbb{T}^d$, un élément $\mathcal{K}_x$ de $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$ hypoelliptique. Notre étude s'appuiera sur l'étude préliminaire du de la famille des modèles (pour $b \in \mathbb{R}$) suivante :

$$K_b = v \cdot \nabla_x + b(v_1\partial_{v_2} - v_2\partial_{v_1}) - \Delta_v + v^2/4 - 1, \text{ dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

où $d = 2$ ou 3, obtenue par figeage du champ magnétique en un point.

Références

[1] B. Helffer and F. Nier. *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*. Springer, 2005. Lecture Notes..

[2] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 171(2):151–218, 2004.

[3] Z. Karaki. Trend to the equilibrium for the Fokker-Planck system with a strong external magnetic field. *hal-01975138*, 2019

Zeinab Karaki, Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
`zeinab.karaki@univ-nantes.fr`