Sur une inégalité fonctionnelle intervenant dans l'analyse de méthodes volumes finis

Flore NABET, CMAP, École polytechnique

Pierre BOUSQUET, IMT, Université de Toulouse

Franck BOYER, IMT, Université de Toulouse

Mots-clés : inégalité de Poincaré-Wirtinger, méthodes volumes finis, conditions aux limites de Ventcell

Le but de ce travail [1] est de démontrer des inégalités fonctionnelles de la forme :

$$\left|\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma u - \frac{1}{|\mathcal{K}|}\int_\mathcal{K} u\right| \leq C\text{diam}(\mathcal{K})\frac{1}{|\mathcal{K}|}\int_\mathcal{K} |Du|, \quad \forall u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n),$$

où $\mathcal{K}$ est un domaine Lipschitz borné et connexe de $\mathbb{R}^n$ et σ un sous-ensemble ouvert, non vide de $\partial\mathcal{K}$. Pour un $\mathcal{K}$ donné, l'existence d'une constante $C > 0$ vérifiant l'inégalité précédente est très claire (en appliquant par exemple le lemme de Bramble-Hilbert) mais il s'agit ici de déterminer de quelle manière cette constante dépend de la géométrie du domaine, et de σ en particulier.

La principale motivation de ce travail est l'importance des inégalités de cette forme lors de l'analyse de schémas volumes finis pour des problèmes elliptiques ou paraboliques sur maillages généraux. Cette inégalité est destinée à être appliquée à chaque volume de contrôle $\mathcal{K}$ du maillage d'un domaine Ω donné. Cela permet alors de prouver des estimations de stabilité dans des espaces de Sobolev (discrets) pour les projections L^2 naturelles des fonctions définies sur Ω et les projections de leurs traces.

Dans le cas d'un domaine polygonal ce résultat est bien connu (voir par exemple [2]). Cependant, dans des situations plus complexes, comme par exemple la discrétisation de l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites de Ventcell ou l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques (voir [3] où ce type d'inégalité est nécessaire pour obtenir la convergence du schéma numérique), le domaine Ω n'est plus polygonal et nous avons besoin d'obtenir une telle inégalité sur des domaines non-polygonaux, typiquement pour des "pseudo-triangles" représentés sur la Figure 1.

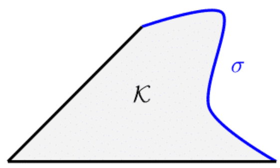

Figure 1: Volume de contrôle $\mathcal{K}$ pouvant apparaître lorsque le domaine Ω n'est plus polygonal

Références

[1] P. Bousquet, F. Boyer, F. Nabet, *On a functional inequality arising in the analysis of finite-volume methods*, Calcolo 53:363-397, 2016.

[2] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *Finite volume methods*, In: Ciarlet, P., Lions, J. (eds.) Handbook of Numerical Analysis, vol. VII, pp. 715-1022, 2000.

[3] F. Nabet, *Convergence of a Finite-Volume scheme for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 36, no 4, pp. 1898-1942 2016.

Flore NABET, CMAP, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, 91128, Palaiseau, France
`flore.nabet@polytechnique.edu`
Pierre BOUSQUET, Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR 5219, Université de Toulouse, CNRS, UPS IMT, F-31062 Toulouse Cedex 9, France
`pierre.bousquet@math.univ-toulouse.fr`
Franck BOYER, Institut de Mathématiques de Toulouse & Institut universitaire de France, UMR 5219, Université de Toulouse, CNRS, UPS IMT, F-31062 Toulouse Cedex 9, France
`franck.boyer@math.univ-toulouse.fr`