Convergence et analyse d'erreur a posteriori pour l'approximation éléments finis d'équations paraboliques dégénérées.

Flore NABET, CMAP, École polytechnique

Clément CANCÈS, Inria Lille – Nord Europe

Martin VOHRALÍK, Inria Paris

Mots-clés : équation parabolique dégénérée, convergence, estimation d'erreur a posteriori.

Dans ce travail [3] nous nous intéressons à des problèmes paraboliques dégénérés écrits sous la forme d'une équation de Fokker-Planck non-linéaire anisotrope. Cette équation présente les principales difficultés apparaissant dans les modèles d'écoulements en milieux poreux (dégénérescence, tenseur de diffusion anisotrope, prise en compte de maillages généraux).

On cherche $u : (0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\eta(u)\Lambda\nabla(p(u) + \Psi)) = f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \eta(u)\Lambda\nabla(p(u) + \Psi) \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega; \\ u(0, \cdot) = u_0, & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

où Ω est un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^d$ (avec $d = 2, 3$), Λ est un champ de tenseurs symétriques définis positifs, p est une fonction strictement croissante, $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante satisfaisant $\eta(0) = 0$ que l'on prolonge à $\mathbb{R}$ par parité et $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}$ est un potentiel donné.

Nous proposons ici un schéma de type éléments finis contrairement au schéma VAG non-linéaire proposé dans [2] ou au schéma DDFV dans [1]. Ceci conduit à une écriture et une mise en œuvre plus simple tout en préservant les principales propriétés de ces schémas. En effet, ce schéma permet de prendre en compte à la fois la dégénérescence et l'anisotropie sur maillages généraux. De plus, il préserve au niveau discret certaines des propriétés essentielles du système continu, telle que par exemple la dissipation de l'énergie physique et ne fait intervenir que des quantités ayant un sens physique (les transformées de Kirchhoff n'interviennent pas dans la définition du schéma). De plus, bien que le schéma soit basé sur des éléments finis de Lagrange de degré 1, il est localement conservatif après un post-traitement local permettant de reconstruire un flux équilibré. Ceci permet d'obtenir une estimation d'erreur a posteriori garantie pour la solution approchée, c'est à dire une borne supérieure d'erreur du résidu.

Nous présentons également des résultats numériques permettant de mettre en évidence le bon comportement de ce schéma dans diverses situations, en particulier en présence d'un fort ratio d'anisotropie.

Références

[1] C. Cancès, C. Chainais-Hillairet, S. Krell, *Numerical analysis of a nonlinear free-energy diminishing Discrete Duality Finite Volume scheme for convection diffusion equations*, Computational Methods in Applied Mathematics, (2017).

[2] C. Cancès, C. Guichard, *Numerical analysis of a robust free energy diminishing finite volume scheme for parabolic equations with gradient structure*, Found. Comput. Math., 17 (2017), pp. 15251584.

[3] C. Cancès, F. Nabet, M. Vohralìk, *Convergence and a posteriori error analysis for energy-stable finite-element approximations of degenerate parabolic problems*, soumis, 2018.

Flore NABET, CMAP, École polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, 91128, Palaiseau, France
flore.nabet@polytechnique.edu
Clément CANCÈS, Inria, Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille
clement.cances@inria.fr
Martin VOHRALÍK, Inria, 2 rue Simone Iff, 75589 Paris, France & Université Paris-Est, CERMICS (ENPC), 77455 Marne-la-Vallée, France
martin.vohralik@inria.fr