Schémas compacts pour l'équation de Poisson

Erwan DERIAZ, Institut Jean Lamour, CNRS/Université de Lorraine

Mots-clés : Équation de Poisson, schéma compact, ordre élevé

Pour résoudre l'équation de Poisson dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$

$$\Delta u = v \quad \text{avec} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 u$$

nombreux sont ceux qui se restreignent au schéma centré classique d'ordre deux qui consiste à additionner dans les d directions le schéma en dimension une

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = v_i,$$

avec h le pas d'espace et u_i une approximation de $u(ih)$. Pourtant des ordres de précision bien supérieurs sont facilement accessibles en recourant aux schémas compacts [1] :

$$\frac{1}{h^2} Au = Bv,$$

avec A une approximation du Laplacien Δ *i.e.* $\frac{1}{h^2}Au = \Delta u + O(h)$ et B une pertubation de l'identité *i.e.* $Bv = v + O(h)$.
Les avantages de cette discrétisation sont multiples:
- il est possible de respecter le *Principe du Maximum Discret* même à des ordres très élevés (alors qu'on est limité à l'ordre deux pour le non compact) [3],
- elle garantit une meilleure isotropie que l'addition des schémas 1-d non compacts (les plus "simples" à réaliser),
- elle assure une meilleure précision spectrale [4, 5],
- à ordre égal, le diamètre du stencil du schéma compact est deux fois plus petit que celui du schéma non compact, voir beaucoup plus dans le cas $\Delta u = 0$ qui donne les conditions minimales portant sur A.

L'équation de Poisson intervient de façon fondamentale en physique dans le calcul des forces électriques et de gravitation. La précision de sa résolution conditionne la qualité des simulations dans de nombreux domaines comme la chimie *ab initio*, la simulation des condensats de Bose-Einstein ou les équations de la magnétohydrodynamique [2]. D'où l'intérêt de la démarche.
La présentation montrera comment construire efficacement ces schémas et donnera plusieurs applications en association avec des schémas de raffinement de maillage adaptatif et des schémas multigrilles.

Références

[1] L. Collatz, *The numerical treatment of differential equations*, livre, 584 pages, Springer-Verlag Berlin 1966.

[2] D. Del Sarto, E. Deriaz, *A multigrid AMR algorithm for the study of magnetic reconnection*, J. Comput. Phys. **351** 511–533, 2017.

[3] E. Deriaz, Schémas aux différences finies compacts pour l'équation de Poisson en dimension quelconque, prépublication hal-01620825, 2017.

[4] S. Hosseinverdi, H.F. Fasel, *An efficient, high-order method for solving Poisson equation for immersed boundaries: Combination of compact difference and multiscale multigrid methods*, J. Comput. Phys. **374** 912–940, 2018.

[5] S. K. Lele, *Compact finite difference schemes with spectral-like resolution*, J. Comput. Phys. **103**(1) 16–42, 1992.

Erwan DERIAZ, Institut Jean Lamour – Matériaux-Métallurgie-Nanosciences-Plasmas-Surfaces – UMR 7198 - CNRS - Université de Lorraine – Campus Artem – 2 allée André Guinier - BP 50840 – 54011 Nancy Cedex
`erwan.deriaz@univ-lorraine.fr`