Modèles de milieux continus généralisés et conditions aux limites obtenus par homogénéisation d'ordre deux pour la propagation d'ondes en milieux périodiques 1D.

Rémi CORNAGGIA, LMA, Marseille

Nicolas FAVRIE, IUSTI, Marseille

Bruno LOMBARD, LMA Marseille

On s'intéresse à la propagation d'ondes dans des milieux élastiques périodiques 1D, qui peuvent modéliser des ondes de compression dans des poutres ou des ondes planes en incidence normale dans des milieux laminés. Dans un tel milieu, le champ de déplacement u_ℓ et la contrainte normale σ_ℓ satisfont l'équation d'ondes et la loi de comportement:

$$\rho(x/\ell)\partial_t^2 u_\ell(x,t) - \partial_x \sigma_\ell(x,t) = 0, \qquad \sigma_\ell(x,t) = E(x/\ell)\partial_x u_\ell(x,t), \tag{1}$$

où la masse volumique ρ et le module d'Young E sont des fonctions 1-périodiques et ℓ est la période du milieu. Des conditions initiales et aux limites viennent compléter le problème à résoudre.

Pour des longueurs d'ondes grandes devant ℓ, l'homogénéisation asymptotique double-échelle de l'équation (1) conduit à décomposer u_ℓ en la somme d'un *champ moyen* U lentement variable et de correcteurs oscillants d'ordres supérieurs. Pousser la méthode à l'ordre deux [1] donne une famille d'équations pour ce champ moyen:

$$\frac{1}{c_0^2}\partial_t^2 U - \partial_x^2 U - \ell^2 \left(\eta_x \partial_x^4 U - \frac{\eta_m}{c_0^2}\partial_x^2\partial_t^2 U - \frac{\eta_t}{c_0^4}\partial_t^4 U \right) = 0, \quad \text{avec} \quad \eta_x - \eta_m - \eta_t = \eta \tag{2}$$

où la vitesse c_0 et le paramètre η sont fixés par le processus d'homogénéisation. Deux degrés de libertés sont donc encore ajustables pour choisir le triplet (η_x, η_m, η_t). Des choix judicieux permettent notamment de bien approximer les effets dispersifs du matériau périodique et même de décrire le premier *band-gap* si $\beta_x \neq 0$ [1].

Des modèles tels que l'équation (2) comportant des dérivées d'ordre 4 en espace et en temps pauvent par ailleurs être obtenus en combinant des modèles de *second gradient* et *gradient de contrainte* bien connus dans la littérature des milieux continus généralisés [2].

Dans ce contexte, nous préciserons le cadre à donner à la famille d'équations (2), notamment les intervalles admissibles auxquels les paramètres (η_x, η_m, η_t) doivent appartenir pour garantir de bonnes propriétés mathématiques et/ou physiques des modèles, et les choix optimaux pouvant être faits dans ces intervalles pour approcher au milieu le comportement du milieu périodique. La présentation sera illustrée par des simulations de propagation d'ondes satisfaisant le modèle périodique exact (1) et les modèles approchés (2) dans des milieux bornés. Pour les modèles approchés, on soulignera la nécessité de corriger également les conditions aux limites ou de transmission à l'interface avec un milieu homogène [3, Chap. 4].

Remerciements Le séjour post-doctoral de R. Cornaggia au LMA est financé par une bourse du labex *Mécanique et complexité*.

Références

[1] Wautier, A. & Guzina, B. B., *On the second-order homogenization of wave motion in periodic media and the sound of a chessboard*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 78:382 – 414, 2015.

[2] Forest, S. & Sab, K., *Finite-deformation second-order micromorphic theory and its relations to strain and stress gradient models*, Mathematics and Mechanics of Solids, SAGE Publications, 2017

[3] Cornaggia, R., *Development and use of higher-order asymptotics to solve inverse scattering problems*, PhD Thesis (ENSTA, Universit Paris Saclay and CEGE, University of Minnesota), 2016

Rémi CORNAGGIA, Laboratoire de mécanique et d'acoustique, UMR 7031 AMU - CNRS - Centrale Marseille
cornaggia@lma.cnrs-mrs.fr