Passive control of tracers advection in point vortices flow : a case study

Boris Wembe, IRIT-ENSEEIHT

Olivier Cots, IRIT-ENSEEIHT

Joseph Gergaud,, IRIT-ENSEEIHT

Mots-clés : Contrôle optimale, principe du maximum, système affine avec dérive, vortex, circulation

Dans ce travail, qui est une application de la théorie du contrôle optimal à la mécanique des fluides, on s'intéresse à un aspect récent (voir [4]) de la théorie sur les vortex à savoir le déplacement optimal de particules dans un fluide visqueux autour de points vortex (solutions des équations d'Euler incompressible dans le cas d'une viscosité répartie dans un nombre fini de points). La modélisation du problème de contrôle optimal dans ce cas s'inspire de celle faite dans le cadre du contrôle de vortex présenté dans [3][5] partant de l'hypothèse qu'une particule est un point vortex à circulation nulle. Le critère à optimiser est le temps de parcours (ou l'énergie nécessaire pour le déplacement) de la particule entre le point initial et le point final dans le cas où il existe des trajectoires admissibles les reliant. D'un point de vue contrôle nous sommes dans un cas riemannien avec dérive, avec un hamiltonien donnée par $H(x,p,u) = H_0(x,p) + u_1 H_1(x,p) + u_2 H_2(x,p)$ $(H(x,p,u) = H_0(x,p) + u_1 H_1(x,p) + u_2 H_2(x,p) + p^0 |u|^2$ dans le cas énergie min). L'étude de l'optimalité passe notamment par la détermination du lieu de coupure qui, due la dérive, est plus ou moins complexe selon que la dérive est forte ou faible. Nous considérons premièrement un seul vortex autour de la particule avec pour objectif d'analyser les conditions nécessaires de second ordre et de construire une synthèse optimale dans le cas d'une dérive faible. La construction de la synthse dans le cas d'une dérive forte que nous faisons dans la suite est plus complexe à cause de la discontinuité de la fonction valeur due à la présence d'anormales dans ce cas. Ceci étant, nous finirons par une analyse numérique autour d'un exemple pratique et proposons une ouverture aux cas de plusieurs vortex.

Références

[1] J.-B. Caillau, O. Cots, J. Gergaud, Differential continuation for regular optimal control problems, Optimization Methods and Software, 2010.

[2] M. P. Do Carmo, Riemannian geometry, Birkhuser, Mathematics : Theory & applications, second edn 1988.

[3] P. K. Newton, The N-vortex problem : Analytical techniques, Springer, New york, 2001.

[4] B. Protas, Vortex dynamics models in flow control problems, IOP Science Nonlinearity, 2008.

[5] P. G. Saffman, Vortex dynamics, University Press, Cambridge, 1992.

[6] E. Trélat, Contrôle optimal : Théorie et applications, Mathématiques, UMR 8628, 2005.

Boris Wembe, IRIT-ENSEEIHT, 2 Rue Camichel, Toulouse, France
Boris.Wembe@irit.fr