Familles exponentielles sur les cônes convexes saillants et densités de Gibbs covariantes sur les variétés symplectiques homogènes : exemple du disque de Poincaré via l'application moment et les orbites coadjointes de $SU(1,1)$

Frédéric BARBARESCO, Thales Air Systems

L'étude des densités exponentielles invariantes par un groupe remonte aux travaux de Muriel Casalis dans sa thèse de 1990 [1–3] encadrée par G. Letac [20–22]. Ce problème avait été étudié précédemment dans un cadre géométrique par Jean-Louis Koszul dans les années 60 [3–7], en parallèle des travaux d'Ernest Vinberg [8, 10, 11] en Russie, pour définir des densités, sur des cônes convexes saillants, invariantes par les automorphismes de ces cônes. Le problème général a été résolu pour les groupes de Lie par Jean-Marie Souriau en Mécanique Géométrique en 1969 [12, 13], en définissant une "Thermodynamique des groupes de Lie" en Mécanique Statistique. Ce modèle de Souriau considère la statistique des systèmes dynamiques dans leur "espace d'évolution" associée à une variété symplectique, et définit grce à des outils cohomologiques (non équivariance de l'action coadjointe pour l'application moment avec apparition d'un cocyle de Souriau) une densité (de Gibbs) qui est covariante sous l'action des groupes dynamiques de la physique (par exemple, le groupe de Galilée en physique classique). Le cas des familles exponentielles invariantes par un groupe est un cas particulier associé au groupe affine. L'approche de Koszul et Souriau utilise la représentation affine des groupes de Lie et algèbre de Lie. Jean-Louis Koszul revient sur ce modèle de Jean-Marie Souriau en 1987 (ouvrage qui vient d'tre traduit en anglais [14]). Ces structures géométriques associées aux familles exponentielles permettent de définir des généralisations de la métrique de Fisher [15–17] en géométrie de l'Information (métrique de Fisher-Koszul liée à la 2-forme de Koszul sur les cônes convexes saillants et métrique de Fisher-Souriau liée aux orbites coadjointes et l'application moment). L'équation de Clairaut-Legendre à la base de ces structures géométriques avait été découverte dès 1943 par Maurice Fréchet [18, 19] de faon concomitante à sa découverte de la borne de Fréchet-Darmois. Nous illustrerons ces outils pour le cas du disque de Poincaré considéré, conjointement comme un domaine borné homogène ou comme une variété Symplectique homogène, homéomorphe à $SU(1,1)/K$ avec K le sous-groupe compact maximal en utilisant la décomposition de Cartan, et l'application moment et les orbites coadjointes de $SU(1,1)$ [23–25].

Références

[1] Casalis, M., *Familles exponentielles naturelles invariantes par un groupe*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1990.

[2] Casalis, M, *Familles exponentielles naturelles sur $\mathbb{R}^d$ invariantes par un groupe*, Int. Stat. Rev., 59(2), pp. 241-262, 1991.

[3] Casalis, M, *Les familles exponentielles à variance quadratique homogène sont des lois de Wishart sur un cône symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 312, pp. 537540, 1991.

[4] Koszul J.L., *Domaines bornées homogènes et orbites de groupes de transformations affines*, Bull. Soc. Math. France 89, pp. 515-533, 1961.

[5] Koszul J.L., *Ouverts convexes homogènes des espaces affines*, Math. Z., 79, pp. 254259, 1962.

[6] Koszul J.L., *Variétés localement plates et convexité*, Osaka. J. Math., 2, pp. 285290, 1965.

[7] Koszul J.L., *Déformations des variétés localement plates*, Ann Inst Fourier, 18, pp. 103-114, 1968.

[8] Koszul J.L., *Trajectoires Convexes de Groupes Affines Unimodulaires*. In Essays on Topology and Related Topics; Springer: Berlin, Germany, pp. 105-110, 1970.

[9] Alekseevsky D., *Vinberg's theory of homogeneous convex cones : developments and applications, Transformation groups 2017.* Conference dedicated to Prof. Ernest B. Vinberg on the occasion of his 80th birthday, Moscou, December, 2017; `https://www.mccme.ru/tg2017/slides/alexeevsky.pdf`.

[10] Vinberg E.B., *Homogeneous cones*, Dokl. Akad. Nauk SSSR., 133, pp. 912, 1960 ; Soviet Math. Dokl., 1, pp. 787790, 1961.

[11] Vinberg E.B., *The structure of the group of automorphisms of a convex cone*, Trudy Moscov. Mat. Obshch., 13, pp.5683, 1964 ; Trans. Moscow Math. Soc., 13, 1964.

[12] Souriau, J.M., *Structure des systèmes dynamiques*, Editions Jacques Gabay: Paris, France, 1970.

[13] Souriau, J.-M., *Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie*, Colloques internationaux du CNRS numéro 237, Géométrie symplectique et physique mathématique, pp. 59113, 1974.

[14] Koszul, J.L., *Introduction to Symplectic Geometry*, Science Press: Beijing, China, 1986 (en chinois), traduit en anglais par Springer, avec préface de M. Boyom, F. Barbaresco and C.M. Marle, 2019; `https://www.springer.com/la/book/9789811339868`.

[15] Barbaresco, F., *Jean-Louis Koszul and the elementary structures of Information Geometry*, in Geometric Structures of Information, Nielsen, F.; Ed., Springer: Berlin, Germany, 2018; `https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-02520-5_12`.

[16] Barbaresco, F., *Koszul Contemporaneous Lectures: Elementary Structures of Information Geometry and Geometric Heat Theory*, in Introduction to Symplectic Geometry; Koszul, J.L., Ed.; Springer: Berlin, Germany, 2018.

[17] Barbaresco, F., *Jean-Louis Koszul et les Structures Elémentaires de la Géométrie de l'Information*, Revue SMAI Matapli; SMAI Editor, Volume 116, pp. 71-84, Novembre 2018.

[18] Fréchet, M., *Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons*, Rev. l'Institut Int. Stat. 11(3/4), pp. 182205, 1943.

[19] Barbaresco, F., *Les densités de probabilité distinguées et l'équation d'Alexis Clairaut: regards croisés de Maurice Fréchet et de Jean-Louis Koszul*, conférence Histoire de la discipline, GRETSI'17 , Juan-Les-Pins, Septembre 2017.

[20] Letac, G., *Lectures on Natural Exponential Families and their Variance Functions*, Instituto De Matematica Pura E Aplicada, 1992.

[21] Letac, G., *Les familles exponentielles statistiques invariantes par les groupes du Cône et du parabolode de révolution*, Journal of Applied Probability, Vol. 31, Studies in Applied Probability, pp. 71-95, 1994.

[22] Letac, G., Wesolowski, J., *Why Jordan Algebras are Natural in Statistics: Quadratic Regression Implies Wishart Distributions*, Bull. Soc. math. France 139 (1), p. 129144, 2011.

[23] Cishahayo, C., de Bièvre, S., *On the contraction of the discrete series of* $SU(1;1)$, Annales de l'institut Fourier, tome 43, no 2, pp. 551-567, 1993.

[24] Cahen, B., *Contraction de* $SU(1,1)$ *vers le groupe de Heisenberg*, Travaux mathématiques, Fascicule XV, pp.19-43, 2004.

[25] Dai, J., Pickrell, D., *The orbit method and the Virasoro extension of* $Diff_{+}(S_1)$*: I. Orbital integrals*, Journal of Geometry and Physics, 44, pp.623-653, 2003.

[26] Guichardet, A., *La méthode des orbites: historiques, principes, résultats*, Leons de mathématiques d'aujourd'hui, Vol.4, Cassini, pp. 33-59, 2010.

[27] Faraut, J., Kornyi, A., *Analysis on symmetric cones*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford Univ. Press, Oxford Science Publications, 1994.

[28] Ishi, H., Kolodziejek, B., *Characterization of the Riesz Exponential Familly on Homogeneous Cones*, arXiv:1605.03896, 12 December 2018.

[29] Tojo, K., Yoshino, T., *A Method to Construct Exponential Families by Representation Theory*, arXiv:1811.01394, 4 November 2018.

[30] Bargmann, V., *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. Math. 48, pp.588-640, 1947.

[31] Souriau, J.-M., *Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie*, Colloques int. du CNRS numéro 237. In Proceedings of the Géométrie Symplectique et Physique Mathéma-tique, Aix-en-Provence, France, 2428, pp. 59113, June 1974.

[32] Kirillov, A. A., *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[33] Marle, C.-M., *From Tools in Symplectic and Poisson Geometry to J.-M. Souriau's Theories of Statistical Mechanics and Thermodynamics*, Entropy, 18, 370, 2016.

[34] Barbaresco, F., *Higher Order Geometric Theory of Information and Heat Based on Poly-Symplectic Geometry of Souriau Lie Groups Thermodynamics and Their Contextures: The Bedrock for Lie Group Machine Learning*, Entropy 2018, 20, 840.

[35] Vergne, M., *Representations of Lie groups and the orbit method*, Actes Coll. Bryn Mawr, p.59-101, Springer 1983.

[36] Pukanszky, L., *The Plancherel formula for the universal covering group of $SL(2,\mathbb{R})$*, Math. Ann. 156, pp.96-143, 1964.

[37] Clerc, J. L. and Orsted, B., The Maslov Index Revisited, Transformation Groups, 6(4), pp.303-320, 2001.

[38] Foth, P. and Lamb, M., *The Poisson Geometry of $SU(1,1)$)*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 51, September 2010.

[39] Barbaresco, F., *Lie Group Machine Learning and Gibbs Density on Poincaré Unit Disk from Souriau Lie Groups Thermodynamics and $SU(1,1)$ Coadjoint Orbits*, soumis à GSI'19, Toulouse, Aout 2019.

Frédéric BARBARESCO, Thales Air Systems, Voie Pierre Gilles de Gennes, 91470 Limours
`frederic.barbaresco@thalesgroup.com`