Méthodes stochastiques pour la résolution d'équations aux dérivées partielles en grande dimension.

Arthur MACHEREY, École Centrale de Nantes et Université Grenoble Alpes

Marie BILLAUD-FRIESS,

Anthony NOUY,

Clémentine PRIEUR,

Dans cet exposé, nous proposons de résoudre des équations aux dérivées partielles en grande dimension par des méthodes combinant approximation adaptative et interprétation probabiliste des EDPs.
Nous traiterons de problèmes elliptiques en dimension d avec conditions de Dirichlet

$$\mathcal{A}(u) = g \text{ in } \mathcal{D}, \quad u = f \text{ on } \partial\mathcal{D}, \tag{1}$$

avec $u : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $\mathcal{D}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}$ un opérateur différentiel elliptique, $f : \partial\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ étant respectivement la condition de bord et le terme source de l'EDP.
Nous associons à l'EDP (1) une équation différentielle stochastique de la forme suivante

$$dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t, \quad X_0^x = x \in \overline{\mathcal{D}}, \tag{2}$$

où b et σ sont respectivement les termes de dérive et de diffusion de l'EDS.
En faisant des hypothèses appropriées, u admet une représentation de Feynman-Kac

$$u(x) = \mathbb{E}\left[F(u, X^x)\right], \tag{3}$$

où $F(u, X^x)$ dépend du processus solution de (2) et de u à travers $g = \mathcal{A}(u)$ et $f = u_{|\partial D}$.
Numériquement, (3) peut-tre approchée par

$$u_{\Delta t,M}(x) = \hat{\mathbb{E}}_M\left[F(u, X^{x,\Delta t})\right],$$

avec $\hat{\mathbb{E}}_M$ un estimateur de Monte-Carlo utilisant M réalisations indépendantes de $X^{x,\Delta t}$ une approximation de X^x obtenue par un schéma d'Euler-Maruyama.
Afin d'améliorer la convergence de cet estimateur, nous utilisons l'approche de réduction de variance séquentielle présentée dans [2]. Cette approche consiste à construire récursivement une suite de fonctions $\tilde{u}_n$ où $\tilde{u}_{n+1}$ est définie comme une approximation globale de u construite à partir d'évaluations ponctuelles de

$$u_{\Delta t,M}^{n+1}(.) = \tilde{u}^n(.) + \hat{\mathbb{E}}_M\left[F(u - \tilde{u}^n, X^{\cdot,\Delta t})\right], \quad \tilde{u}^0 = 0.$$

Ici, $F(u - \tilde{u}^n, X^{x,\Delta t})$ joue le rôle de variable de contrôle. Pour l'approximation globale, nous utilisons une méthode d'interpolation parcimonieuse adaptative [1] permettant de traiter des problèmes de grande dimension.
Nous proposons deux algorithmes combinant variables de contrôle et approximation parcimonieuse. Des résultats numériques illustreront les performances de ces algorithmes.

Références

[1] A. Chkifa, A. Cohen & C. Schwab. High-dimensional adaptive sparse polynomial interpolation and applications to parametric PDEs. *Found. Comput. Math.*, 2014, vol. 14 p. 601–633.

[2] E. Gobet & S. Maire. Sequential control variates for functionals of Markov processes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2005, vol. 43, no 3, p. 1256-1275.

Arthur MACHEREY, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, École Centrale de Nantes and Laboratoire Jean Kuntzmann, project/team Inria AIRSEA, Université Grenoble Alpes
arthur.macherey@ec-nantes.fr
Marie BILLAUD-FRIESS, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, École Centrale de Nantes
marie.billaud-friess@ec-nantes.fr
Anthony NOUY, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, École Centrale de Nantes
anthony.nouy@ec-nantes.fr
Clémentine PRIEUR, Laboratoire Jean Kuntzmann, project/team Inria AIRSEA, Université Grenoble Alpes
clementine.prieur@univ-grenoble-alpes.fr