

Optimisation du support non cylindrique du contrôle pour l'équation des ondes unidimensionnelle

Arthur BOTTOIS, Université Clermont Auvergne

On s'intéresse au problème de la contrôlabilité à zéro de l'équation des ondes (en une dimension d'espace) avec un contrôle distribué dont le support varie avec le temps. Dans [1], les auteurs montrent que si le support $q_\gamma = \{(x, t) \in (0, 1) \times (0, T); |x - \gamma(t)| < \delta_0\}$ du contrôle est choisi comme le δ_0 -voisinage ($\delta_0 > 0$ fixé) d'une courbe $\gamma \in C^1([0, T])$, alors, pour un temps de contrôlabilité T assez grand et pour toute condition initiale $(y_0, y_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$, il existe un unique contrôle v_γ de norme $L^2(q_\gamma)$ -minimale tel que la solution y de l'équation des ondes

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} = v_\gamma \mathbf{1}_{q_\gamma} & \text{dans } (0, 1) \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sur } \{0, 1\} \times (0, T), \\ (y, y_t)(\cdot, 0) = (y_0, y_1) & \text{dans } (0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

vérifie $(y, y_t)(\cdot, T) = (0, 0)$ dans $(0, 1)$.

On peut donc alors chercher à minimiser la norme L^2 du contrôle par rapport à son support. Cela revient à minimiser la fonctionnelle $J(\gamma) = \frac{1}{2} \|v_\gamma\|_{L^2(q_\gamma)}^2$. En se restreignant à des courbes γ appartenant à l'ensemble admissible $\mathcal{A} = \{\gamma \in C^1([0, T]); \|\gamma'\|_{L^\infty(0, T)} \leq \beta\}$ avec $\beta > 0$ fixé, l'existence d'un minimum de J est obtenue par le biais d'une inégalité d'observabilité uniforme (par rapport à γ) pour le problème adjoint de (1).

Du point de vue numérique, on implémente une méthode de descente afin de minimiser J . Pour cela, on calcule la variation première de J par rapport au support à l'aide de développements similaires à ceux de [2]. À chaque itération, le contrôle v_γ est approché par la méthode des éléments finis en s'appuyant sur la formulation variationnelle mixte décrite dans [1]. De plus, afin que les courbes itérées restent dans l'ensemble admissible \mathcal{A} , on ajoute le terme de régularisation $\frac{\varepsilon}{2} \|\gamma'\|_{L^\infty(0, T)}^2$ à la fonctionnelle.

Sur la Figure 1, la partie gauche représente l'onde non contrôlée associée aux conditions initiales $y_0(x) = (10x - 4)^2(10x - 6)^2 \mathbf{1}_{[0.4, 0.6]}(x)$ et $y_1(x) = y_0'(x)$. La partie droite représente quant à elle le support optimal du contrôle pour ces mêmes conditions initiales et $T = 2$.

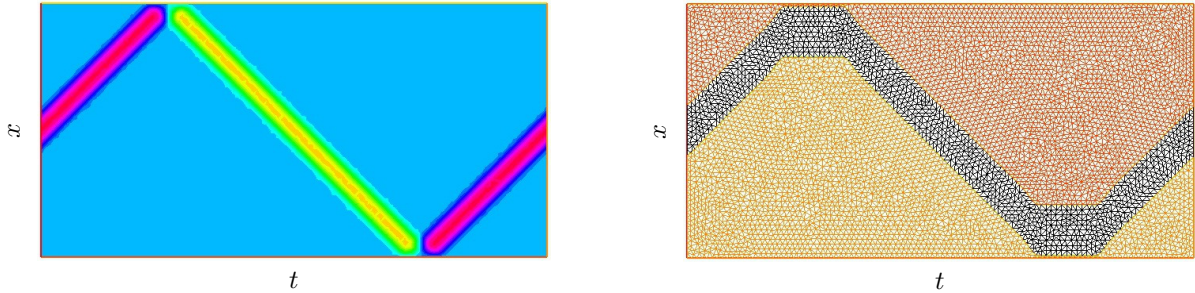


Figure 1: Onde non contrôlée (à gauche) et support optimal du contrôle (à droite en noir)

Références

- [1] C. CASTRO, N. CÎNDEA, A. MÜNCH, *Controllability of the linear one-dimensional wave equation with inner moving forces*, SIAM Journal on Control and Optimization 52.6, 2014.
- [2] A. MÜNCH, *Optimal location of the support of the control for the 1-D wave equation: numerical investigations*, Computational Optimization and Applications 42.3, 2009.

Arthur BOTTOIS, Université Clermont Auvergne, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, CNRS UMR 6620, Campus des Cézeaux, 3 place Vasarely, 63178 Aubière
arthur.bottois@uca.fr