

Densités de probabilités sur des variétés et groupes de Lie

Alice LE BRIGANT, ENAC

Dans de nombreuses applications, comme les statistiques directionnelles, l'imagerie de tenseurs de diffusion (DTI), le traitement du signal radar ou encore l'analyse de formes, les objets d'étude ne sont pas facilement représentables par des éléments d'un espace vectoriel. La géométrie riemannienne est alors souvent utilisée pour modéliser cette absence de linéarité. L'étude de ce type de données réelles nécessite des outils statistiques et de traitement de données bien souvent introduits dans un cadre vectoriel. La généralisation aux variétés riemanniennes de concepts statistiques usuels [7] et de méthodes standard d'analyse de données comme l'analyse en composantes principales [10] ou la quantification [5], est par conséquent un défi important. L'absence d'unicité de généralisation de lois usuelles comme la loi gaussienne, selon que l'on veuille privilégier le respect de certaines invariances [3, 1] ou la concidence entre maximum de vraisemblance et centre de masse riemannien [9], rend cette problématique non triviale. Les lois de probabilités elles-mêmes peuvent être analysées via la géométrie riemannienne. Une famille paramétrée de lois peut être munie d'une structure de variété riemannienne grâce à la métrique de Fisher, qui définit ainsi une géométrie dite de l'information. Les cas gaussiens unidimensionnel, multidimensionnel centré, et multidimensionnel centré stationnaire ont très récemment, notamment en DTI [8] et en traitement du signal radar [2], permis de découvrir une géométrie à courbure négative. Dans le cas non stationnaire, il faut changer l'espace de représentation et se tourner vers le groupe de Lie spécial orthogonal [4]. D'autres applications comme l'imagerie médicale font émerger d'autres lois comme la loi gamma généralisée, pour la géométrie de laquelle peu de résultats sont connus. Dans cette session, nous présenterons différentes pistes pour aborder ces questions, pour des applications allant du traitement du signal au contrôle du trafic aérien, en passant par l'imagerie médicale.

Liste des orateurs

- Guillaume Bouleux, Représentation des processus stochastiques périodiquement corrélés sur le groupe $SO(n)$.
- Stéphane Puechmorel, Résumés de trafic aérien basés sur la géométrie de matrices de covariance.
- Sana Rebbah, The geometry of the generalized gamma manifold with an application in medical imaging.
- Frédéric Barbaresco, Familles exponentielles sur les cônes convexes saillants et densités de Gibbs covariantes sur les variétés symplectiques homogènes : exemple du disque de Poincaré via l'application moment et les orbites coadjointes de $SU(1,1)$.

Références

- [1] BARBARESCO, F., *Jean-Louis Koszul and the elementary structures of Information Geometry*, in Geometric Structures of Information, Nielsen, F.; Ed., Springer: Berlin, Germany, 2018.
- [2] BARBARESCO, F., *Innovative tools for radar signal processing based on cartan geometry of SPD matrices and information geometry*, 2008 IEEE Radar Conference, pp. 1-6, 2008.
- [3] CASALIS, M., *Familles Exponentielles Naturelles sur R^d Invariantes par un Groupe*, Int. Stat. Rev., 59, pp. 241-262, 1991.
- [4] M. DUGAST AND G. BOULEUX AND E. MARCON, *Representation and Characterization of Non-stationary Processes by Dilation Operators and Induced Shape Space Manifolds*, Entropy: From Physics to Information Sciences and Geometry, 2018.
- [5] LE BRIGANT, A., PUECHMOREL, S., *Optimal Riemannian quantization with an application to air traffic analysis*, 2018. arXiv preprint arXiv:1806.07605.
- [6] LENGLET, C., ROUSSON, M., DERICHE, R., FAUGERAS, O., *Statistics on the manifold of multivariate normal distributions: Theory and application to diffusion tensor MRI processing*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 25(3), pp. 423-444, 2006.

- [7] PENNEC, X., *Intrinsic Statistics on Riemannian Manifolds: Basic Tools for Geometric Measurements*, J. Math. Imaging Vis., 25, pp. 127-154, 2006.
- [8] PENNEC, X., FILLARD, P., AYACHE, N., *A Riemannian framework for tensor computing*, International Journal of computer vision, 66(1), pp. 41-66, 2006.
- [9] SAID, S., BOMBRUN, L., BERTHOUMIEU, Y., MANTON, J. H., *Riemannian Gaussian distributions on the space of symmetric positive definite matrices*, IEEE Transactions on Information Theory, 63(4), pp. 2153-2170, 2017.
- [10] SOMMER, S., LAUZE, F., HAUBERG, S., NIELSEN, M., *Manifold valued statistics, exact principal geodesic analysis and the effect of linear approximations*, in European conference on computer vision, pp. 43-56, 2010.