Un schéma numérique pour l'équation de Boltzmann multi-espèces dans la limite de diffusion : caractère bien posé et propriétés principales

Andrea BONDESAN, Université Paris Descartes

Laurent BOUDIN, Université Pierre et Marie Curie

Bérénice GREC, Université Paris Descartes

On considère l'équation de Boltzmann multi-espèces [3], à une seule dimension en espace et en vitesse, avec scaling diffusif. On suppose que les nombres de Mach et de Knudsen sont du même ordre de grandeur $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Pour chaque espèce $1 \leq i \leq I$, la fonction de densité associée $f_i^\varepsilon = f_i^\varepsilon(t,x,v)$ est solution de l'équation

$$\varepsilon \partial_t f_i^\varepsilon + v \partial_x f_i^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{I} Q_{ij}(f_i^\varepsilon, f_j^\varepsilon),$$

posée dans $\mathbb{R}_+^* \times \Omega \times \mathbb{R}$, où Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour chaque densité f_i^ε, on définit la quantité de matière et le flux macroscopiques

$$c_i^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f_i^\varepsilon(t,x,v) \mathrm{d}v,$$

$$F_i^\varepsilon(t,x) := c_i^\varepsilon(t,x) u_i^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}} v f_i^\varepsilon(t,x,v) \mathrm{d}v.$$

On note m_i la masse de l'espèce i pour tout $1 \leq i \leq I$, K_B la constante de Boltzmann et T la température globale et uniforme du mélange gazeux. En utilisant la méthode des moments [5], on suppose l'ansatz suivant (associé au paramètre de scaling ε) pour chaque fonction de distribution f_i^ε

$$f_i^\varepsilon(t,x,v) = c_i^\varepsilon(t,x) \left(\frac{m_i}{2\pi K_B T} \right)^{1/2} \exp \left\{ -m_i \frac{(v - \varepsilon u_i^\varepsilon(t,x))^2}{2 K_B T} \right\},$$

pour récupérer une limite diffusive de type Maxwell-Stefan comme dans [2]. On parvient à écrire un schéma numérique décrivant l'évolution des quantités macroscopiques c_i^ε et F_i^ε pour toute valeur suffisamment petite du paramètre ε. On prouve des estimations *a priori* (conservation de la masse et positivité) et le caractère bien posé du problème discret. On présente aussi des tests numériques où l'on observe que le schéma possède une propriété de préservation de l'asymptotique (AP) du problème, similaire à celle montrée dans [4].

Références

[1] A. Bondesan, L. Boudin, B. Grec, *A numerical scheme for a kinetic model for mixtures in the diffusive limit using the moment methods*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 2019.

[2] L. Boudin, B. Grec, V. Pavan, *The Maxwell-Stefan diffusion limit for a kinetic model of mixtures with general cross sections*, Nonlinear Analysis, 2017.

[3] L. Desvillettes, R. Monaco, F. Salvarani, *A kinetic model allowing to obtain the energy law of polytropic gases in the presence of chemical reactions*, Eur. J. Mech. B Fluids, 2005.

[4] S. Jin, Q. Li, *A BGK-penalization-based asymptotic-preserving scheme for the multispecies Boltzmann equation*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 2013.

[5] C. D. Levermore, *Moment closure hierarchies for kinetic theories*, J. Statist. Phys., 1996.

Andrea BONDESAN, MAP5, Université Paris Descartes, 45 rue des Saints Pères, 75270 Cedex 06 Paris
andrea.bondesan@parisdescartes.fr
Laurent BOUDIN, LJLL, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris
laurent.boudin@sorbonne-universite.fr
Bérénice GREC, MAP5, Université Paris Descartes, 45 rue des Saints Pères, 75270 Cedex 06 Paris
berenice.grec@parisdescartes.fr