Contrôlabilité interne de systèmes d'ondes couplées avec un nombre réduit de contrôles

Christophe ZHANG, Laboratoire Jacques-Louis Lions

Nous présentons une méthode pour prouver la contrôlabilité locale de systèmes d'équations d'ondes semilinéaires couplées, en une dimension d'espace, avec un seul contrôle interne :

$$\begin{cases} u_{tt} - \nu_1^2 u_{xx} = f_1(u,v) + h, \ x \in [0,L], \\ v_{tt} - \nu_2^2 v_{xx} = f_2(u,v), \ x \in [0,L], \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \\ v(t,0) = v(t,L) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions de compatibilité d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \forall \beta \in \{0,L\}, \quad & u_0(\beta) = u_1(\beta) = (u_0^f)(\beta) = (u_1^f)(\beta) = 0, \\ & u_0''(\beta) = u_1''(\beta) = (u_0^f)''(\beta) = (u_1^f)''(\beta) = 0, \\ & v_0(\beta) = v_1(\beta) = (v_0^f)(\beta) = (v_1^f)(\beta) = 0, \\ & v_0''(\beta) = v_1''(\beta) = (v_0^f)''(\beta) = (v_1^f)''(\beta) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

La méthode reprend la stratégie de [1], qui montre la contrôlabilité locale pour des systèmes hyperboliques d'ordre 1 quasilinéaires couplés.

$$\begin{cases} u_t - \Lambda_1(u) u_x = f_1(u,v) + h, \ x \in [0,L], \\ u_t - \Lambda_2(u) v_x = f_2(u,v), \ x \in [0,L], \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \\ v(t,0) = v(t,L) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

sous la condition

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(0,0) \neq 0. \tag{4}$$

La stratégie est la suivante : montrer d'abord un résultat de contrôlabilité avec deux contrôles, puis réduire le nombre de contrôles à l'aide d'un théorème d'inversion locale de Mikhail Gromov (voir [2]).
Cette stratégie s'adapte au système (1) lorsque la même condition (4) est vérifiée.
Dans le cas contraire, il est possible de prouver la contrôlabilité en travaillant autour d'une trajectoire près de laquelle le théorème d'inversion locale de Gromov peut être appliqué, dans le même esprit que la méthode du retour. On prouve ainsi la contrôlabilité du système :

$$\begin{cases} \Box_{\nu_1} u = h, \ x \in [0,L], \\ \Box_{\nu_2} v = u^3, \ x \in [0,L], \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \\ v(t,0) = v(t,L) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

La construction de la trajectoire de référence s'inspire de la construction dans [3], qui montre le même type de résultat pour deux équations de la chaleur avec un couplage cubique.

Références

[1] F. Alabau-Boussouira, J.-M. Coron, G. Olive, *Internal controllability of first order quasilinear hyperbolic systems with a reduced number of controls*, preprint, 2015.

[2] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[3] J.-M. Coron, S. Guerrero, L. Rosier, *Null controllability of a parabolic system with a cubic coupling term*, SIAM J. Control Optim., 2010.

Christophe ZHANG, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, UMR 7598 Laboratoire Jacques-Louis Lions, 75005 Paris, France.
christophe.zhang@polytechnique.org