

Super-résolution d'impulsions de Diracs par échantillonnage de Fourier aléatoire

Yann Traonmlin, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, France

Nicolas Keriven, Rémi Gribonval, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, France

Gilles Blanchard, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Germany

Estimer des sommes d'impulsions de Diracs à partir d'observations linéaires en utilisant des méthodes variationnelles convexes a récemment été l'objet de différentes études : il a été montré que si les Diracs sont suffisamment séparés, il est possible d'estimer leurs positions après leur convolution par un filtre passe bas [1]. Ce problème de super-résolution a de plus été relié à un problème de reconstruction de densité de probabilité à partir de moments empiriques généralisés ("sketches") [2]. Ces résultats suggèrent qu'une somme d'impulsions de Diracs peut être estimée à partir de mesures de Fourier aléatoires au lieu de mesures régulières des basses fréquences.

Soit δ_t la mesure de Dirac à la position t dans \mathbb{R}^d et \mathcal{B} l'ensemble des mesures de Radon. On cherche à retrouver les éléments $\Sigma_{k,\epsilon} = \{\sum_{i=1,k} a_i \delta_{t_i} : \forall k \neq l, \|t_k - t_l\|_2 \geq \epsilon, \|t_i\|_\infty \leq 1, a_i \in \mathbb{R}_+, t_i \in \mathbb{R}^d\}$ à partir d'observations linéaires. Le paramètre de résolution ϵ représente la séparation minimum entre impulsions. On étudie la reconstruction de $x_0 \in \Sigma_{k,\epsilon}$, à partir d'observations linéaires bruitées $Ax_0 + e$ avec $Ax_0 = (\int_t x_0(t) f_i(t) dt)_{i=1,m}$ où $f_i(t) = e^{j(\omega_i, t)}/c_{\omega_i}$, $(\omega_i)_{i=1,m}$ est un ensemble de fréquences de \mathbb{R}^d et c_{ω_i} est une pondération. On compare deux opérateurs :

- A_U : **Echantillonnage de Fourier aléatoire (filtre passe bas)**: les $(\omega_i)_{i=1,m}$ échantillonnent uniformément l'ensemble $[-\frac{\pi q}{2}, \frac{\pi q}{2}]^d$ où q est un entier et $m = (2q + 1)^d$. Ici $c_\omega = 1$.
- A_R : **Echantillonnage de Fourier aléatoire pondéré**: Chaque ω_i est une fréquence tirée aléatoirement selon la distribution de probabilité proportionnelle à $c_\omega e^{-\sigma^2 \|\omega\|_2^2/2}$ (où σ est le paramètre réglant la distribution de fréquences, ici $c_\omega = \sqrt{2 + \sigma^2} \|\omega\|_2^2 + \sigma^4 \|\omega\|_2^4$ est un terme de pondération).

En dimension un, il est possible d'utiliser une méthode convexe à partir d'observations par A_U si $m \geq \frac{2}{\epsilon}$ [1] ($m \geq O(1/\epsilon)$ est une condition nécessaire pour ces méthodes convexes). On considère la méthode de super-résolution "idéale"

$$x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \Sigma_{k,\epsilon}} \|Ax - (Ax_0 + e)\|_2. \quad (1)$$

On considère de plus une métrique $\|\cdot\| := \|\cdot\|_h = \|h \star \cdot\|_2$ où h est un noyau de convolution gaussien (de variance $1/\sigma^2$) pour quantifier l'erreur de reconstruction. On établit le théorème suivant

Théorème Soit $\sigma_k := \frac{1}{2.4(\ln k + 10)}$, $\epsilon > 0$, $\sigma \leq \sigma_k \epsilon$ et $h(t) = e^{-\|t\|_2^2/(2\sigma^2)}$.

Supposons $m \geq O(k^2 d^3 \operatorname{polylog}(k, d) \log(1/\epsilon))$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathcal{B}$ et $y = A_R x_0 + e$, avec grande probabilité sur le tirage de A_R , on a

$$\|x^* - x_0\|_h \leq C(\|e\|_2 + d_h(x_0, \Sigma)) \quad (2)$$

où x^* est un minimiseur de (1) et $d_h(x_0, \Sigma_{k,\epsilon}) = \inf_{x \in \Sigma_{k,\epsilon}} \|x_0 - x\|_h$ est l'erreur de modélisation.

Ainsi pour k, d fixés, seulement $m = O(\log(1/\epsilon))$ mesures avec A_R sont suffisantes pour la reconstruction (comparé au cas du filtre passe bas A_U , en dimension un, où $m = O(1/\epsilon)$ sont nécessaires pour les méthodes convexes). Ce théorème donne aussi la distribution selon laquelle on tire A_R . Ces résultats sont confirmés par des expériences utilisant une heuristique approchant la méthode de super-résolution idéale étudiée.

Références

- [1] E.J. CANDÉS AND C. FERNÁNDEZ-GRANDA, *Super-resolution from noisy data*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 19(6):1229–1254, 2013.
- [2] N. KERIVEN, N. TREMBLAY, Y. TRAONMILIN, AND R. GRIBONVAL, *Compressive K-means*, ICASSP, 2017.

Yann Traonmlin, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, Campus de Beaulieu,
FR-35042 Rennes Cedex, France
yann.traonmlin@inria.fr