Équations de Maxwell dispersives et application aux métamatériaux à indice négatif

Valentin Vinoles, École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Mots-clés : équations de Maxwell, milieux dispersifs, problèmes d'évolution, Perfectly Matched Layers (PMLs), métamatériaux, indice de réfraction négatif, modèles de Drude et de Lorentz

La propagation des ondes électromagnétiques dans la matière donne nécessairement lieu à de la *dispersion* [1, chapitre 7] : l'interaction des ondes avec le milieu ambiant dépend de leur fréquence (sauf dans le cas du vide). Dans un cadre très général, les équations de Maxwell dans les milieux dispersifs sont

$$\begin{cases} \varepsilon_0\, \partial_t E(x,t) + (\Lambda_{ee} * E)(x,t) + (\Lambda_{em} * H)(x,t) = \operatorname{curl} H(t,x), & t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^3, \\ \mu_0\, \partial_t H(x,t) + (\Lambda_{me} * E)(x,t) + (\Lambda_{mm} * H)(x,t) = -\operatorname{curl} E(t,x), & (* \text{ convolution en temps}), \end{cases} \tag{M}$$

avec ε_0 (resp. μ_0) la permittivité (resp. perméabilité) du vide, $E \in \mathbb{R}^3$ (resp. $H \in \mathbb{R}^3$) le champ électrique (resp. magnétique) et où les Λ_{ij} sont des matrices 3×3 qui caractérisent la dispersion du milieu.

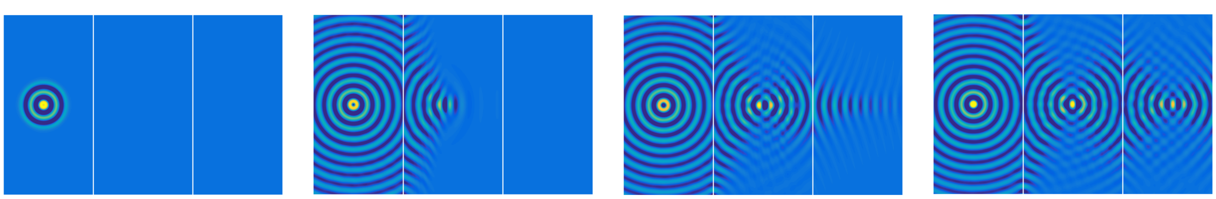
Analyse mathématique. Nous montrerons deux résultats:

1. Le problème (M), auquel des sources peuvent être ajoutées, est bien posé dans un cadre fonctionnel adapté (solutions faibles) sous deux hypothèses fondamentales:
   - *Causalité:* $\Lambda_{ij}(t) = 0$ pour tout $t < 0$;
   - *Passivité:* $\operatorname{Re} \widehat{\Lambda_{ij}} \geq 0$ presque partout, où $\widehat{\Lambda_{ij}}$ est la transformée de Fourier en temps de Λ_{ij}.
2. Il y a propagation à vitesse finie inférieure ou égale à $c := 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$: si les champs $E(\cdot, 0)$ et $H(\cdot, 0)$ ainsi que les sources sont nuls sur une boule $B(0,R)$, alors $E(\cdot,t) = H(\cdot,t) = 0$ sur $B(0, R - ct)$.

Application aux Métamatériaux à Indice Négatif (MIN). Le cadre général de (M) permet de modéliser des MIN, milieux tels que $\operatorname{Re} \widehat{\varepsilon}$ et $\operatorname{Re} \widehat{\mu}$ soient négatives sur une (ou des) bande(s) de fréquences (ε et μ sont la permittivité et la perméabilité du milieu), comme le modèle de Drude ($\omega_p > 0$ et $\gamma \geq 0$) :

$$\widehat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\, i\, \gamma\, \omega - \omega^2} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda_{ee}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \omega_p^2\, e^{-\gamma\, t} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}. \tag{D}$$

Nous discuterons des méthodes numériques développées dans [2, 3] pour résoudre (D) (et sa généralisation le modèle de Lorentz) notamment la construction de nouvelles Perfectly Matched Layers (PMLs) stables (les PMLs classiques sont instables) et montrerons des illustrations. Ci-dessous une tranche d'un milieu de type (D) est entourée de vide, ce qui permet d'illustrer la présence d'un indice de réfraction négatif donnant lieu à une double refocalisation (lentille plate) :



Références

[1] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics* (third edition), John Wiley & Sons, 1999.

[2] V.V., *Problèmes d'interface en présence de métamatériaux : modélisation, analyse et simulations*, thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay, 2016

[3] É. Bécache, P. Joly and V.V., *On the analysis of perfectly matched layers for a class of dispersive media and application to negative index metamaterials*, submitted to Math. of Comp. (hal-01327315)

Valentin Vinoles, EPFL, SB MATHAA CAMA station 8, 1004 Lausanne (SUISSE)
valentin.vinoles@epfl.ch