Méthode numérique pour l'analyse asymptotique dun problème parabolique contenant un terme de transport raide

Thomas BLANC, I2M, Université dAix-Marseille

Mihai BOSTAN, I2M, Université dAix-Marseille

Franck BOYER, IMT, Université de Toulouse

Mots-clés : Homogénéisation, Théorie ergodique, Schéma semi-Lagrangien

Ce travail a pour objet l'analyse asymptotique d'une équation parabolique possédant un terme de transport raide. On cherche à étudier le comportement de la famille $(u\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ lorsque ε tend vers 0, où u^ε est solution du problème raide :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \mathrm{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon, & (t,\, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0,\, y) = u^{\mathrm{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

où D est un champ de matrices symétriques positives, b est un champ de vecteurs régulier à divergence nulle et où la donnée initiale u^{in} est régulière et non nécessairement bien préparée. D'un point de vue numérique cette étude est fortement contrainte par la présence du petit paramètre ε et les méthodes numériques classiques sont inopérantes lorsque ε se rapproche de zéro. Une stratégie possible consisterait à déterminer un système limite homogénéisé, non pénalisé par ε, dont la solution rend compte du comportement de u^ε lorsque ε est proche de zéro. Dans cette optique, il est montré dans [1] que le comportement de u^ε à l'asymptotique $\varepsilon = 0$ peut être décrite, au sens fort, comme la composé du flot rapide associé au champ $\frac{1}{\varepsilon} b$ et d'un profil v indépendant de ε. L'introduction d'un correcteur permet dobtenir un ordre de convergence. De plus, il est montré que le profil v est solution d'une équation parabolique dont le champ de diffusion peut être explicité comme la moyenne ergodique du champ de diffusion initial D le long d'un groupe d'opérateurs. On propose dans cet exposé une méthode numérique pour calculer le champ de diffusion effectif basé sur la combinaison d'un schéma Runge-Kutta et d'un schéma de type semi-Lagrangien. L'ordre de convergence démontré dans [1] est mis en évidence de manière numérique, on propose une méthode numérique basée sur un splitting d'opérateur pour la résolution de (1).

Références

[1] T. Blanc, M. Bostan, F. Boyer, *Asymptotic analysis of parabolic equations with stiff transport terms by a multi-scale approach*, Submitted, preprint : hal-01242679.

Thomas BLANC, Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France
thomas.blanc@univ-amu.fr
Mihai BOSTAN, Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France
mihai.bostan@univ-amu.fr
Franck BOYER, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, IMT, UMR 5219, 31062 Toulouse, France
franck.boyer@math.univ-toulouse.fr