Étude des fluctuations en homogénéisation aléatoire

Frédéric LEGOLL, Navier (ENPC) et équipe-projet MATHERIALS (INRIA)

Pierre-Loïk ROTHÉ, CERMICS/Navier (ENPC) et équipe-projet MATHERIALS (INRIA)

Mots-clés : Homogénéisation aléatoire, fluctuations

On considère l'équation

$$-\mathrm{div}\left[A(\frac{\cdot}{\varepsilon},\omega)\nabla u_\varepsilon\right] = f \,\mathrm{dans}\, \Omega, \quad u_\varepsilon(\cdot,\omega) = 0 \,\mathrm{sur}\, \partial\Omega \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, la matrice A est aléatoire, stationnaire et varie à la petite échelle ε. La théorie de l'homogénéisation permet de caractériser la limite de u_ε quand $\varepsilon \to 0$.

Pour u_ε solution de (1) avec le second membre f et pour une fonction $g \in C_c^\infty(\Omega)$, on s'intéresse au comportement de la variable aléatoire I_ε définie par

$$I_\varepsilon(f,g) = \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \int_\Omega (u_\varepsilon - \mathbb{E}[u_\varepsilon])g \tag{2}$$

qui représente les fluctuations (localisées) de u_ε autour de son comportement moyen.

D'après les travaux de [2], dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$, f et g sont $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et où les opérateurs différentiels dans (1) sont des opérateurs discrets (différences finies), on a $I_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, avec $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2. La valeur de σ^2 peut être facilement calculée à partir de $\mathcal{Q}$, un tenseur d'ordre 4 (indépendant de f et g), et de $u^\star$ et $v^\star$ solutions du problème homogénéisé avec second membres f et g respectivement. Le tenseur $\mathcal{Q}$ (dont le calcul nécessite la résolution du problème du correcteur) caractérise donc les fluctuations de I_ε.

Dans ce travail, on essaie de retrouver le même type de résultat pour l'EDP (1). On abordera cette question à la fois sur le plan théorique, en considérant un modèle faiblement aléatoire de la forme

$$A(x,\omega) = A_{per}(x) + \eta A_1(x,\omega) \tag{3}$$

avec A_{per} une matrice périodique, A_1 une matrice aléatoire stationnaire et $\eta \ll 1$ un petit paramètre (cf [1]), et sur le plan numérique, dans un cas générique (non faiblement aléatoire).

Références

[1] Xavier Blanc, Ronan Costaouec, Claude Le Bris, and Frédéric Legoll. *Variance reduction in stochastic homogenization using antithetic variables. Markov Processes and Related Fields*, 18(1):31–66, 2012.

[2] Mitia Duerinckx, Antoine Gloria, and Felix Otto. *The structure of fluctuations in stochastic homogenization. arXiv preprint arXiv:1602.01717*, 2016.

Frédéric LEGOLL, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`frederic.legoll@enpc.fr`
Pierre-Loïk ROTHÉ, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2
`pierre-loik.rothe@enpc.fr`