`HamPath` – Suivi de chemin différentiel et conditions du second ordre en contrôle optimal

Olivier COTS, Toulouse Univ., INP-ENSEEIHT-IRIT & CNRS

Le code `HamPath` [7] est un logiciel open-source développé depuis 2009 et destiné à la résolution de problèmes de contrôle optimal. Toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale solution du principe du maximum de Pontryagin [3]. L'utilisation de techniques avancées en contrôle géométrique permet de réduire l'ensemble des candidats à être des minimiseurs. Ces candidats, donnés par le principe du maximum, sont la concaténation de différentes extrémales solutions de différents systèmes hamiltoniens. Un point clé est de bien définir chaque système hamiltonien qui compose la séquence optimale, qu'il faut elle-même déterminer. Cette séquence optimale peut contenir des arcs bangs, sur lesquels le contrôle est de norme constante et maximale presque partout, des arcs singuliers, ayant des valeurs de contrôle intermédiaires, ou encore dans le cas de contraintes pures sur l'état, des arcs frontières et intérieurs. Lorsque la structure optimale et les systèmes hamiltoniens sont définis, alors il est possible d'écrire un système d'équations non linéaires $F(X) = 0$ qui peut être résolu par `HamPath`.

Le logiciel `HamPath` s'appuie sur des méthodes dites indirectes en contrôle optimal. Contrairement aux méthodes directes qui se basent sur la discrétisation en le contrôle et/ou l'état pour former un système de grande taille, ici, le système d'équations non linéaires à résoudre est en petite dimension et s'écrit sous la forme d'équations dites de tir [6]. On utilise alors des méthodes de tir simple ou de tir multiple pour la résolution. Le problème de contrôle optimal peut dépendre de paramètres Λ et le système d'équations non linéaires peut alors s'écrire sous la forme $F(X, \Lambda) = 0$. Le code `HamPath` permet la résolution de ce système pour une valeur donnée de Λ mais aussi pour une famille de problèmes de contrôle optimal, *i.e.* lorsque Λ varie. Le code s'appuie sur des méthodes de Prédiction-Correction [2] pour le calcul de chemin de zéros de $F(X, \Lambda) = 0$. L'originalité du code vient du fait que le suivi se fait de manière précise (schéma de Runge-Kutta d'ordre élevé), ce qui permet de ne faire que peu de corrections, par exemple seulement aux extrémités du chemin. On propose une application des méthodes homotopiques dans le cadre d'un problème avec deux contraintes sur l'état, qui permet d'obtenir une synthèse des structures optimales en fonctions des bornes des contraintes, voir [8].

Le principe du maximum fournit des conditions nécessaires d'optimalité. Dans [1] et [5], les auteurs donnent des conditions du second ordre pour des problèmes respectivement où la condition de Legendre stricte est vérifiée, et affines en le contrôle. Ces conditions issues de la théorie des champs d'extrémales peuvent être vérifiées simplement par le calcul du premier temps conjugués (noté t_c), voir [4] pour les algorithmes. On propose une nouvelle méthode appliquée en géométrie riemannienne pour le calcul du premier temps conjugué, pour un problème dépendant d'un paramètre λ. On calcule ainsi $t_c(\lambda)$ à l'aide des méthodes de suivi de chemin différentiel.

Références

[1] A. A. Agrachev & Y. L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, vol **87** of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin (2004), xiv+412.

[2] E. Allgower & K. Georg, *Introduction to numerical continuation methods*, vol. **45** of *Classics in Applied Mathematics*, Soc. for Industrial and Applied Math., Philadelphia, PA, USA, (2003), xxvi+388.

[3] V. G. Boltyanskiĭ, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, & L. S. Pontryagin, *The mathematical theory of optimal processes.* Classics of Soviet Mathematics. Gordon & Breach Science Publishers, New York, (1986), xxiv+360.

[4] N. Bonnard, J.-B. Caillau & E. Trélat, *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control,* ESAIM Control Optim. and Calc. Var, 13 (2007), no. 2, 207–236.

[5] B. Bonnard & M. Chyba, *Singular trajectories and their role in control theory*, vol **40** of *Mathematics & Applications*, Springer-Verlag, Berlin (2003), xvi+357.

[6] R. Bulirsch & J. Stoer, *Introduction to numerical analysis*, vol. **12** of *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2^{nd} edition, 1993, xvi+744.

[7] J.-B. Caillau, O. Cots & J. Gergaud, *Differential continuation for regular optimal control problems*, Optim. Methods Softw., **27** (2012), no 2, 177–196.

[8] O. Cots, *Geometric and numerical methods for a state constrained minimum time control problem of an electric vehicle*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., (2016), to appear.

Olivier COTS, Toulouse Univ., INP-ENSEEIHT-IRIT, UMR CNRS 5505, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse
`olivier.cots@enseeiht.fr`