Analyse de sensibilité pour les équations de Maxwell

Jérémy Heleine, Université de Picardie Jules Verne

Marion Darbas, Université de Picardie Jules Verne

Stephanie Lohrengel, Université de Reims-Champagne Ardenne

Mots-clés : équations de Maxwell, analyse de sensibilité, éléments finis d'arête

Les applications de l'imagerie micro-onde sont multiples, allant du domaine industriel avec le contrôle non destructif de matériaux jusqu'au domaine biomédical avec la détection de tumeurs ou le diagnostic d'AVC. Elle s'appuie sur la détection de perturbations dans les coefficients électromagnétiques (permittivité et conductivité électriques) d'un milieu donné à partir de mesures du champ proche ou lointain. Mathématiquement, cela revient à résoudre un problème inverse.

Pour cela, la première étape est d'étudier le problème direct, représenté par les équations de Maxwell en champ électrique et en régime harmonique :

$$\begin{cases} \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} - k^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\right)\mathbf{E} = \mathbf{F}, & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{curl}\,\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{$\mathcal{M}$}$$

où $\mathbf{E}$ est l'intensité du champ électrique dans Ω qui est un domaine borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^3$ de bord $\Gamma = \partial\Omega$ et de normale unitaire sortante $\mathbf{n}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{g}$ sont des champs donnés, ε et σ représentent respectivement la permittivité et la conductivité électriques à l'intérieur de Ω. Enfin, le paramètre $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ est le nombre d'onde, avec ω la fréquence de l'onde et ε_0 et μ_0 respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

Dans un premier temps, nous avons mené une étude numérique en discrétisant le problème ($\mathcal{M}$) par la méthode des éléments finis d'arête (voir [1]). L'objectif était de déterminer si des perturbations à l'intérieur du domaine pouvaient être détectées à la surface avec l'utilisation d'ondes planes en entrée.

Nous avons ensuite fait une analyse de sensibilité des mesures surfaciques du champ électrique lorsque les coefficients électromagnétiques à l'intérieur du domaine sont légèrement perturbés. Ceci revient à étudier une dérivée de Gâteaux (voir [2]) du champ électrique. Nous avons déterminé l'équation de sensibilité vérifiée par cette dérivée. La résolution numérique de cette équation nous a ainsi permis de mettre en valeur les zones sensibles aux perturbations.

Dans cet exposé, nous présenterons l'analyse de sensibilité du problème ($\mathcal{M}$) aussi bien du point de vue théorique que numérique. En particulier, nous avons mis en évidence une première conjecture reliant la localisation des perturbations et les mesures en surface. Ces résultats sont une étape préliminaire à l'étude d'un problème inverse associé à ($\mathcal{M}$) qui consiste à identifier les paramètres électromagnétiques ε et σ à partir de mesures de bord du champ électrique.

Références

[1] Peter Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press, 2003.

[2] Jeff Borggaard et Vitor Leite Nunes, *Fréchet Sensitivity Analysis for Partial Differential Equations with Distributed Parameters*, American Control Conference, 2011.

Jérémy Heleine, LAMFA UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex 1
`jeremy.heleine@u-picardie.fr`
Marion Darbas, LAMFA UMR CNRS 7352, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex 1
`marion.darbas@u-picardie.fr`
Stephanie Lohrengel, LMR EA 4535, Université de Reims-Champagne Ardenne, Moulin de la Housse, 51687 Reims Cedex 2
`stephanie.lohrengel@univ-reims.fr`