Contrôlabilité d'équations et de systèmes paraboliques

Franck BOYER, Institut de Mathématiques de Toulouse

Dans cet exposé, je présenterai quelques résultats plus ou moins récents sur les propriétés de contrôlabilité d'équations ou de systèmes paraboliques et de leurs discrétisations.
Un exemple typique que je considérerai est le suivant:

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \Delta y_1 & = 1_\omega v, \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_t y_2 - \Delta y_2 + a(x) y_1 & = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ y_1 = y_2 = 0, & \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\star$}$$

Le contrôle $(t,x) \mapsto v(t,x)$ (que l'on souhaite déterminer) agit ici comme un terme source dans la première équation, localisé en espace dans un sous-domaine ouvert non trivial ω du domaine Ω. Il est connu depuis une vingtaine d'années que la première équation de ce système (i.e. l'équation de la chaleur pour y_1) est contrôlable à zéro (ou aux trajectoires) en n'importe quel instant $T > 0$: cela signifie que pour toute donnée initiale il existe $v \in L^2((0,T) \times \omega)$ tel que la solution associée de l'équation satisfait $y_1(T) = 0$.
Si on souhaite maintenant contrôler les deux composantes (y_1, y_2) du système couplé $(\star)$, on observe que v n'agit pas directement sur la seconde équation et que la seule façon d'agir sur y_2 est **indirecte** à travers le terme de couplage $a(x)y_1$, ce qui complique très significativement l'analyse et donne des résultats plutôt inattendus. On peut ainsi parfois mettre en évidence, par exemple, selon la forme du coefficient a

- des conditions **géométriques** de contrôlabilité, portant sur la position du domaine de contrôle ω,
- l'existence d'un **temps minimal de contrôle** $T_0 > 0$: celui-ci est tel que $(\star)$ est (resp. n'est pas) contrôlable à zéro au temps T dès que $T > T_0$ (resp. $T < T_0$).

Ces propriétés seraient naturelles dans un contexte hyperbolique mais le sont beaucoup moins pour des équations de nature parabolique.

J'aborderai également des questions liées à l'approximation numérique des contrôles pour ces systèmes, ce qui donnera l'occasion de discuter de propriétés spectrales discrètes pour les opérateurs elliptiques discrétisés. Quelques résultats numériques viendront illustrer le propos.

Références

[1] D. Allonsius, F. Boyer and M. Morancey, *Spectral analysis of discrete elliptic operators and applications in control theory*, Submitted, `hal-01422168`

[2] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: A survey,* Mathematical Control and Related Fields, 1(3):267–306, 2011.

[3] F. Boyer, *On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems,* In *CANUM 2012, 41e Congrès National d'Analyse Numérique*, volume 41 of *ESAIM Proc.*, pages 15–58. EDP Sci., Les Ulis, 2013.

[4] F. Boyer and G. Olive, *Approximate controllability conditions for some linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients.* Math. Control Relat. Fields, 4(3):263–287, 2014.

[5] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *New phenomena for the null controllability of parabolic systems: minimal time and geometrical dependence*, J. Math. Anal. Appl., 444 (2016), pp. 1071–1113.

Franck BOYER, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse et Institut universitaire de France, 118 route de Narbonne, 31072 Toulouse Cedex 9
`franck.boyer@math.univ-toulouse.fr`