

# Vers une vue unifiée des relaxations continues exactes du critère $\ell_2\text{-}\ell_0$ : application à la microscopie PALM/STORM.

**Emmanuel SOUBIES**, Biomedical Imaging Group, EPFL

**Laure BLANC-FÉRAUD**, I3S, CNRS, Université Côte d'Azur

**Gilles AUBERT**, JAD, CNRS, Université Côte d'Azur

Dans cet exposé, nous nous intéresserons à la minimisation des moindres carrés pénalisés en norme- $\ell_0$ :

$$\hat{x} \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_0, \quad (1)$$

où la pseudo norme- $\ell_0$  dénombre les composantes non nulles de  $x$ . De nombreuses applications en traitement du signal et des images requièrent la résolution d'un problème inverse pouvant se formaliser par la minimisation de cette fonctionnelle dite  $\ell_2\text{-}\ell_0$ . C'est le cas par exemple des problèmes de déconvolution d'impulsions, de séparation de sources ou encore de super-résolution en microscopie. Après une brève revue de la vaste littérature s'intéressant à ce problème NP-Difficile, nous nous focaliserons plus particulièrement sur les relaxations *continues* de cette fonctionnelle où le terme  $\ell_0$  est remplacé par une pénalité de la forme  $\Phi(x) := \sum_i \phi_i(x_i)$ . Dans ce contexte, se pose la question de la consistance entre les minimiseurs des fonctionnelles initiale et relaxée. Nous répondrons à cette question en mettant en évidence cinq conditions sur  $\Phi$  *nécessaires et suffisantes* pour que les deux propriétés suivantes soient vérifiées quelles que soient les données  $y$ :

- tout minimiseur (local et global) de la fonctionnelle relaxée est un minimiseur de  $\ell_2\text{-}\ell_0$ ;
- les deux fonctionnelles admettent les mêmes minimiseurs globaux.

Notons par ailleurs que ces relaxations éliminent généralement des minimiseurs locaux (non globaux) de  $\ell_2\text{-}\ell_0$  ce qui est une propriété intéressante dans un tel contexte d'optimisation non-convexe. Nous définissons ainsi une classe de pénalités conduisant à des relaxations du critère initial que nous qualifions d'*exactes* de part les propriétés susmentionnées. Il est alors possible de bénéficier, grâce à la *continuité* de ces fonctionnelles relaxées, des dernières avancées dans le domaine de l'optimisation non-convexe afin d'aborder (indirectement) le problème (1). Par ailleurs, les conditions établies sur  $\Phi$  offrent de nouveaux critères permettant de comparer les nombreuses pénalités continues proposées dans la littérature pour approcher la norme  $\ell_0$ . Nous identifierons les paramètres de certaines d'entre elles permettant d'obtenir une relaxation exacte de  $\ell_2\text{-}\ell_0$ . En particulier, nous verrons que la pénalité CEL0 (Continuous Exact  $\ell_0$ ) est celle qui potentiellement élimine le plus de minimiseurs locaux du critère initial et qu'elle correspond à la limite inférieure de la classe de pénalités précédemment définie. Nous terminerons cette présentation par une application à la localisation de molécules en microscopie de super-résolution PALM/STORM<sup>1</sup>.

## Références

- [1] EMMANUEL SOUBIES, LAURE BLANC-FÉRAUD AND GILLES AUBERT, *A continuous exact  $\ell_0$  penalty (CEL0) for least squares regularized problem*, SIAM Journal on Imaging Sciences, 8-3, 2015.
- [2] EMMANUEL SOUBIES, LAURE BLANC-FÉRAUD AND GILLES AUBERT, *A unified view of exact continuous penalties for  $\ell_2\text{-}\ell_0$  minimization*, (soumis), 2016.
- [3] SIMON GAZAGNES, EMMANUEL SOUBIES AND LAURE BLANC-FÉRAUD, *High density molecule localization for super-resolution microscopy using CEL0 based sparse approximation*, Proc ISBI, 2017.

**Emmanuel SOUBIES**, Biomedical Imaging Group, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Suisse  
emmanuel.soubies@epfl.ch

**Laure BLANC-FÉRAUD**, Université Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire I3S UMR 7271, 06903 Sophia Antipolis  
blancf@i3s.unice.fr

**Gilles AUBERT**, Université Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné UMR 7351, 06100 Nice  
gilles.aubert@unice.fr

---

<sup>1</sup>Photo Activation Localisation Microscopy / STochastic Optical Reconstruction Microscopy