Perturbation singulière en contrôle optimal et le problème de montée en temps minimal d'un avion.

Damien GOUBINAT
Thales Avionics SA, IRIT/INP-ENSEEIHT, France

Olivier COTS
IRIT, INP-ENSEEIHT & CNRS, France

Joseph GERGAUD
IRIT, INP-ENSEEIHT & CNRS, France

Mots-clefs : perturbation singulière, contrôle géomètrique, méthodes numériques

Les problèmes de perturbations singulières sont issus de systèmes dynamiques contenant des écarts importants de constante de temps entre les variables d'états ce qui entrainent des difficultés numériques. Pour des problèmes à valeur initiale, le théorème de Tikhonov qui propose de transformer le système différentiel en un système algébro-différentiel permet d'obtenir une approximation uniforme de la solution sur tout intervalle de la forme $[a, T]$ avec $a > 0$ et T fixé. Partant de ce constat, en nous basant sur les travaux de [2, 5, 6], nous étudions la réduction de systèmes hamiltoniens contraints aux deux bouts en présence de perturbation singulière. Sous certaines hypothèses de régularités, réduire la dynamique du système initial puis appliquer le principe du maximum est équivalent à appliquer le principe du maximum et réduire le système hamiltonien correspondant. De plus, certaines propriétés du problème de départ se transposent au problème réduit comme par exemple la condition de Legendre qui est conservée.
Cette réduction est ensuite appliquée au problème de contrôle optimal d'un avion en phase de montée, voir [7], en temps minimal. Sous sa forme initiale, le problème est modélisé sous la forme d'un problème de Mayer de dimension 4 avec un contrôle scalaire. Le problème réduit a quant à lui une dynamique en dimension 3 affine en le contrôle. Le principe du maximum, voir [1], est utilisé sur ces deux problèmes de façon à obtenir les extrémales candidates à former la trajectoire optimale. L'optimalité de ces solutions est vérifiée à l'aide des conditions suffisantes du second-ordre, voir [3], au travers d'une analyse numérique utilisant les méthodes indirectes, voir [4]. Enfin les trajectoires sont comparées en termes de critère et de temps de calcul, nous vérifions également la vraisemblance de la trajectoire du problème réduit par rapport à celle du système initial.

Références

[1] A.A. Agrachev, Yu.L. Sachkov *Control theory from the geometric viewpoint*, 2004, pp. 416.

[2] M.D. Ardema. *Phd thesis. Singular perturbations in flight mechanics*, 1977.

[3] B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat *ESAIM : COCV. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, **13**(2), 2007, pp. 207-236.

[4] J.-B. Caillau, O. Cots and J. Gergaud, *Optim. Methods Softw. Differential continuation for regular optimal control problems*, **27**(2), 2012, pp. 177-196.

[5] N. Moissev. *Problèmes mathématiques d'analyse des systèmes*, 1985, pp. 467.

[6] R.E. O'Malley.*Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, 1991,pp. 234.

[7] D. Poles *Eurocontrol Technical/Scientific Report. Base of Aircraft Data (BADA) Aircraft Performance Modelling Report,* 2009-09, 2009.