# Étude mathématique de l'équation de Kuznetsov

**Adrien DEKKERS**, MICS, CentraleSupélec

**Anna ROZANOVA-PIERRAT**, MICS, CentraleSupélec

**Mots-clés :** équation de Kuznetsov, système de Navier-Stokes, dérivation, caractère bien posé, approximation.

Dans le cadre de l'acoustique non linéaire dans des milieux élastiques thermo-visqueux, (*i.e.* du mouvement potentiel avec une petite viscosité, par exemple propagation des ultrasons dans des tissus biologiques), on considère un modèle d'ondes non-linéaires, l'équation de Kuznetsov, dérivable pour le potentiel de la vitesse d'onde à partir d'un système de Navier-Stokes compressible isentropique (NSCI) par des petites perturbations de la densité et de la vitesse du milieu constant caractérisées par un petit paramètre $\varepsilon > 0$ [1]:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u - \frac{\nu}{\rho_0} \varepsilon \Delta u_t = \frac{\gamma - 1}{c^2} \varepsilon u_t u_{tt} + 2\varepsilon \nabla u \nabla u_t, \quad pour \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

où $c$, $\rho_0$, $\gamma$, $\nu$ sont la vitesse du son dans le milieu, la densité du milieu, le rapport des chaleurs spécifiques et la viscosité respectivement.

Sans termes non linéaires et $\nu > 0$, l'équation (1) est une équation d'ondes amorties qui possède une solution globale et une énergie décroissante en temps. Sans le terme $2\varepsilon \nabla u \nabla u_t$, l'équation (1) devient l'équation de Westervelt. Pour les équations de Kuznetsov et de Westervelt avec $\nu > 0$, dans le cadre d'un domaine borné, il y a des résultats de l'existence globale pour les données suffisament petites. Pour $\nu = 0$, en héritant le comportement du système d'Euler, pour $n \leq 3$, l'équation de Kuznetsov possède des ondes de chocs, ce qui a été démontré par S. Alinhac. Pour $\nu = 0$ on connait également l'existence locale d'une solution régulière pour un problème de Cauchy de (1) qui devient globale si $n \geq 4$ [2].

En considérant le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ pour l'équation de Kuznetsov avec $\nu > 0$, on montre l'existence de solutions fortes globales pour des données initiales régulières suffisament petites. Suivant [3], on prouve d'abord l'existence locale, en étudiant la stabilité du problème linéaire non homogène, et on étend le résultat vers l'existence globale grâce aux estimations a priori. Comme l'équation de Kuznetsov est une approximation d'un système de Navier-Stokes isentropique, on obtient la validation de cette approximation pour $n = 3$. On compare l'évolution au cours du temps des solutions de ces deux systèmes quand ils ont les mêmes données initiales: la distance dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ entre deux solutions reste d'ordre $\varepsilon$ pour les temps d'ordre $\frac{1}{\varepsilon} ln \frac{1}{\varepsilon}$. Pour le montrer on se base sur les résultats connus d'existence des solutions régulières de Navier-Stokes pour les données suffisament petites dans $\mathbb{R}^3$ et les résultats obtenus pour l'équation de Kuznetsov, en utilisant la convexité de l'entropie du système d'Euler [4].

## Références

[1] A. Rozanova-Pierrat, *Approximation of a compressible Navier-Stokes system by non-linear acoustical models*, Proc. of the Int. Conference "Days on Diffraction 2015", St. Petersburg, Russia, pp 270–276.

[2] F. John, *Nonlinear wave equations, formation of singularities* Vol. 2, AMS, Providence, RI, 1990.

[3] S. Meyer, M. Wilke, *Global well-posedness and exponential stability for Kuznetsov's equation in $L_p$-spaces*, Evol. Equ. Control Theory **2** (2013), pp 365–378.

[4] A. Rozanova-Pierrat, *On the Derivation and Validation of the Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK) Equation for Viscous and Nonviscous Thermo-ellastic Media*, Commun. Math. Sci., **7**, No. 3, (2009), pp. 679– 718.

**Adrien DEKKERS**, Laboratoire de Mathématiques et Informatique pour la Complexité et les Systèmes, CentraleSupélec, Châtenay-Malabry

adrien.dekkers@centralesupelec.fr