

Dynamique de concentration dans un modèle de population structuré en âge et en phénotype

Cécile TAING, LJLL, UPMC, Paris

Vincent CALVEZ, UMPA, ENS de Lyon

Samuel NORDMANN, CAMS, EHESS, Paris

Benoît PERTHAME, LJLL, UPMC, Paris

Une manière d'illustrer la sélection d'individus les plus adaptés à partir d'un modèle de population structuré par une variable de trait continu est la convergence de la densité de population vers une masse de Dirac concentrée en le trait sélectionné. Le but de ce travail a été de décrire le comportement asymptotique de la solution d'une équation structurée en âge et en trait et de poser les bonnes hypothèses afin d'observer ce phénomène de concentration.

Voici le modèle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \partial_t m_\epsilon(t, x, y) + \partial_x [A(x, y)m_\epsilon(t, x, y)] + (\rho_\epsilon(t) + d(x, y)) m_\epsilon(t, x, y) = 0, \\ A(x = 0, y)m_\epsilon(t, x = 0, y) = \frac{1}{\epsilon^n} \int M\left(\frac{y'-y}{\epsilon}\right)b(x', y')m_\epsilon(t, x', y')dx'dy', \\ \rho_\epsilon(t) = \int \int m_\epsilon(t, x, y)dx dy, \\ m_\epsilon(t = 0, x, y) = m_\epsilon^0(x, y) > 0, \end{array} \right.$$

avec x la variable d'âge et y un trait phénotypique continu. L'inconnu m_ϵ est la densité de population et la fonction $A(x, y)$ représente le taux de vieillissement de la population portant le trait y . Le paramètre ϵ est introduit par un changement d'échelle de temps. La quantité ρ_ϵ est la densité de population totale et induit un effet de saturation avec le taux de mort $d(x, y) > 0$. Le terme de bord décrit la naissance de nouveaux-nés à un taux de reproduction $b(x, y) > 0$ avec un noyau de mutation M .

Dans un premier temps, nous étudierons un modèle simplifié en supposant qu'il n'y pas de mutations. L'analyse de ce modèle repose sur l'étude d'un problème aux valeurs propres paramétré par la variable de trait. Ensuite nous étudierons le modèle avec mutations qui fait apparaître une équation d'Hamilton-Jacobi sous contrainte qui pose des difficultés techniques dues à la croissance exponentielle en le gradient du hamiltonien.

Références

- [1] V. CALVEZ, S. NORDMANN, B. PERTHAME, C. TAING, *Dynamics of concentration in a population model structured by age and a phenotypical trait*, en preparation.

Cécile TAING, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05
taing@ljl.math.upmc.fr

Vincent CALVEZ, UMPA, ENS de Lyon, 46 alle d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France
vincent.calvez@ens-lyon.fr

Samuel NORDMANN, Ecoles des hautes tudes en sciences sociales, 190-198 avenue de France, 75244 Paris Cedex 13
samuel.nordmann@ehess.fr

Benoît PERTHAME, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05
benoit.perthame@ljl.math.upmc.fr