Simulation de la distribution invariante d'EDP Stochastiques

Charles-Edouard BRÉHIER, CNRS, ICJ, Université Lyon 1

Gilles Vilmart, Université de Genève

On s'intéresse dans cet exposé à la simulation numérique de la distribution invariante μ d'EDP Stochastiques, paraboliques, semilinéaires, du type

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - V'\big(u(t,x)\big) + \xi(t,x), \quad t > 0, x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

o ξ désigne le bruit-blanc espace-temps Gaussien. L'exemple $V(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2}$ correspond à un modèle important, l'équation d'Allen-Cahn.

La distribution invariante μ (supposée unique) caractérise le comportement en temps long (en loi) de la solution $u(t,\cdot)$, partant d'une condition initiale quelconque. En effet, sous de bonnes hypothèses sur le potentiel V, $\mathbb{E}\varphi\big(u(t,\cdot)\big) \underset{t\to\infty}{\to} \int \varphi(v)\mu(dv)$, exponentiellement vite, pour des observables $\varphi : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ suffisamment régulières.

L'approximation numérique de μ passe en général par des simulations en temps long de $u(t,\cdot)$. Elle nécessite donc, d'une part, une discrétisation en temps (pas de temps Δt) et en espace (dimension N), et, d'autre part, l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo pour le calcul de l'espérance. Si $\mu^{\Delta t,N}$ est la distribution invariante du processus discrétisé, le biais de l'approximation est typiquement du type

$$\int \varphi d\mu - \int \varphi d\mu^{N,\Delta t} = \mathrm{O}\big(\Delta t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{N}\big).$$

Pour une erreur ϵ, la complexité est donc d'ordre $\epsilon^{-2}\Delta t^{-1} N = \epsilon^{-5}$.

Dans cet exposé, on présentera plusieurs stratégies (postprocessing, préconditionnement, méthodes Monte Carlo multi-niveaux) permettant de réduire ce cot. En particulier, on définira des schémas visant à améliorer l'ordre de convergence $\frac{1}{2}$.

On détaillera quelques problèmes théoriques concernant l'analyse de ces schémas. En parallèle, des simulations numériques montreront leurs bonnes propriétés qualitatives et quantitatives.

Références

[1] C.-E. Bréhier, G. Vilmart, *High Order Integrator for Sampling the Invariant Distribution of a Class of Parabolic Stochastic PDEs with Additive Space-Time Noise*, Siam J. Sci. Comput, 38(4):A2283A2306, 2016.

Charles-Edouard BRÉHIER, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France
brehier@math.univ-lyon1.fr
Gilles Vilmart, Université de Genève, Section de mathématiques, 2-4 rue du Lièvre, CP 64, 1211 Genève 4, Switzerland
Gilles.Vilmart@unige.ch