Lois de conservation hyperboliques scalaires stochastiques : existence et unicité de la solution entropique ainsi que convergence de schémas numériques

Caroline Bauzet, LMA, Université Aix-Marseille

Vincent Castel, I2M, Université Aix-Marseille

Julia Charrier, I2M, Université Aix-Marseille

Thierry Gallouët, I2M, Université Aix-Marseille

On s'intéressera dans cet exposé à l'approximation numérique de lois de conservation scalaires hyperboliques stochastiques du type

$$\left\{ \begin{array}{rcll} du + \mathrm{div}\big[f(x,t,u)\big]dt & = & g(u)dW(t), & x \in \mathbb{R}^d, \\ u(\omega,x,0) & = & u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{array} \right.$$

Pour cela on considèrera des schémas volumes finis monotones. L'objectif central de cet exposé est d'établir l'existence et l'unicité de la solution (stochastique entropique) et la convergence du schéma vers cette solution dans L^p_{loc} pour $p < 2$ sous une condition de CFL renforcée, généralisant les résultats de [1] au cas d'un flux très général.

On reprendra pour cela les grandes étapes de la preuve de convergence proposée dans [1]. On commencera par établir un résultat de stabilité L^2, puis on utilisera un résultat de compacité au sens des mesures de Young qui permettra d'établir la convergence du schéma (à une sous-suite près). On montrera ensuite que la limite obtenue est une solution mesure stochastique (c'est une notion de solution généralisée). Enfin pour conclure on établira qu'il existe une unique solution mesure stochastique qui est en fait une solution de l'EDPS.

L'apport le plus important par rapport aux travaux précédents est l'utilisation de la solution numérique pour établir le résultat d'unicité (dans les travaux précédents, l'unicité était obtenue à partir d'approximations visqueuses). On a donc une preuve originale du résultat d'unicité (et d'existence) qui ne nécessite pas l'introduction de solutions de problèmes approchés paraboliques et qui de plus a pour vocation naturelle d'tre la première étape d'un travail ultérieur ayant pour objectif l'obtention d'estimations d'erreur fortes.

Références

[1] C. Bauzet, J. Charrier, T. Gallouët *Convergence of monotone finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with multiplicative noise. Stochastic Partial Differential Equations : Analysis and Computations, 2016.*

Vincent Castel, I2M, Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, UMR 7373, 13453 Marseille France
`Vincent.castel@univ-amu.fr`