# Analyse de sensibilité pour les équations d'Euler barotrope en coordonnées Lagrangiennes


Camilla FIORINI, LMV, UVSQ, Versailles.

**Christophe CHALONS**, LMV, UVSQ, Versailles.

**Régis DUVIGNEAU**, Université Côte d'Azur, INRIA, CNRS, Sophia-Antipolis.


L'analyse de sensibilité s'intéresse à l'étude des changements dans la solution d'un système d'Équations aux Dérivées Partielles en fonction de la variation des paramètres d'entrée du modèle. L'analyse de sensibilité a plusieurs applications, y compris la quantification d'incertitude, l'évaluation rapide de solutions proches et l'optimisation basée sur des méthodes de descente. Les techniques standard d'analyse de sensibilité requièrent de dériver la variable d'état, donc elles ne fonctionnent que sous certaines conditions de régularité [1]. Cependant, ces hypothèses ne sont pas vérifiées dans le cas d'équations hyperboliques de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_0(x), \end{cases}$$

à cause des discontinuités qui peuvent se produire même si la donnée initiale est régulière. Si l'état $\mathbf{U}$ est discontinu, des Diracs apparaissent dans la sensibilité $\mathbf{U}_a = \partial_a \mathbf{U}$, où $a$ est le paramètre d'intérêt. Dans le cas régulier, les équations de sensibilité se déduisent en dérivant les équations d'état; cela donne les équations de sensibilité suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \partial_x \mathbf{F}'(\mathbf{U})\mathbf{U}_a = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}_a(x,0) = \mathbf{U}_{a,0}(x). \end{cases}$$

Le but de ce travail est de définir et approximer numériquement un système d'équations de sensibilité valable même quand l'état est discontinu : pour faire cela, nous rajoutons un terme de correction en partant des conditions de Rankine-Hugoniot qui décrivent l'état à travers un choc [3]. Le terme est de la forme :

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{\rho}_k \delta(x - x_{k,s}(t)),$$

où $N_s$ est le nombre de discontinuités, $\boldsymbol{\rho}_k$ est l'amplitude de la $k-$ième correction (à calculer) et $x_{s,k}(t)$ la position de la $k-$ième discontinuité à l'instant $t$. Nous avons appliqué cela aux équations d'Euler barotrope, pour lequel nous avons fait des simulations numériques avec différents schémas : un solveur de type Godunov exact, un solveur approché de Riemann du premier ordre et du second ordre. Les résultats numériques obtenus avec ces schémas montrent que la diffusion numérique joue un rôle assez important : sans un contrôle rigoureux de cette diffusion, la sensibilité numérique ne converge pas vers la solution exacte. Nous définissons donc également un schéma sans diffusion numérique inspiré de [2] qui permet d'obtenir un parfait accord entre les solutions exactes et approchées.

### Références


[1] C. Bardos and O. Pironneau, *A formalism for the differentiation of conservation laws*, Compte rendu de l'Académie des Sciences, 335(10):839-845, 2002.

[2] C. Chalons and P. Goatin, *Godunov scheme and sampling technique for computing phase transitions in traffic flow modeling.*, Interfaces and Free Boundaries, 10(2):197-221, 2008.

[3] V. Guinot, *Upwind finite volume solution of sensitivity equations for hyperbolic systems of conservation laws with discontinuous solutions.*, Computers & Fluids, 38(9):1697-1709, 2009.



**Camilla FIORINI**, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles, France.
`camilla.fiorini@uvsq.fr`
**Christophe CHALONS**, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles, France.
`christophe.chalons@uvsq.fr`
**Régis DUVIGNEAU**, Université Côte d'Azur, INRIA, CNRS, LJAD, INRIA Sophia-Antipolis Méditerranée Center, ACUMES Project-Team, 2004 route des Lucioles - B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis, France.
`regis.duvigneau@inria.fr`