Densité de probabilité à maximum d'entropie, définition générale covariante de Jean-Marie Souriau et Jean-Louis Koszul

Frédéric BARBARESCO, Thalès Air Systems

Avant de développer la notion de densité à maximum d'entropie (densité de Gibbs), l'exposé rappellera en préambule le cheminement historique de la notion de "fonction caractéristique" introduite en thermodynamique par François Massieu et développée par Williard Gibbs et Pierre Duhem sous la forme de potentiels thermodynamiques. Le travail de Massieu eut une grande influence sur Henri Poincaré, qui introduisit la "fonction caractéristique" en probabilité (un logarithme lie les 2 notions en probabilité et en thermodynamique). Dans le cas des densités à Maximum d'entropie (densité de Gibbs), la métrique Riemannienne associée au hessien de la fonction caractéristique (logarithme de la fonction de partition) est égale à la matrice de Fisher. Les structures de ces géométries hessiennes ont été étudiées en parallèle par le mathématicien Jean-Louis Koszul et son thésard Jacques Vey dans le cadre plus général des cônes convexes saillants (formes de Koszul, fonction caractéristique de Koszul-Vinberg), en cherchant une métrique qui soit invariante par les automorphismes de ces cônes convexes. La notion de densité à maximum d'entropie a été étendue par Jean-Marie Souriau dans les années 60 dans le cadre de la mécanique statistique pour rendre la densité de Gibbs covariante sous l'action des groupes dynamiques de la physique. Il étend la notion d'ensemble canonique de Gibbs à une variété symplectique homogène sur laquelle un groupe agit (groupes dynamiques de la physique ; sous-groupes du groupe affine : groupe de Galilée ou groupe de Poincaré). Lorsque ces groupes sont non commutatifs, l'algèbre de Lie du groupe vérifie des relations de type cohomologique qui brisent la symétrie. Pour rétablir cette symétrie, Souriau introduit une température géométrique comme élément de l'algèbre de Lie, et une chaleur géométrique (moyenne de l'Energie qui est le moment de l'action hamiltonnienne du groupe) comme élément de son dual, permettant de remettre en dualité, via la transformée de Legendre, l'Entropie géométrique et le logarithme de la fonction de partition (fonction caractéristique) définie pour ces nouvelles variables. La densité de Gibbs-Souriau (densité à Maximum d'Entropie) possède alors la propriété d'être covariante pour le groupe qui agit, et l'Entropie de Boltzmann géométrique associée est invariante pour tout symplectomorphisme. Si on se restreint dans ce modèle au groupe des translations temporelles, on retrouve la théorie de la thermodynamique classique, et pour un espace euclidien la statistique classique des gaussiennes. Jean-Marie Souriau a appelé cette nouvelle structure élémentaire de la physique statistique la thermodynamique des groupes de Lie et précisa que ces formules sont universelles, en ce sens qu'elles ne mettent pas en jeu la variété symplectique, mais seulement le groupe, son cocycle symplectique et le couple de la température et de la chaleur (géométriques). Dans le modèle affine de Souriau, comme dans celui de Jean-Louis Koszul, les structures fondamentales sont déduites de la représentation affine des groupes et algèbres de Lie. Les modèles de Souriau et Koszul permettent ainsi d'approfondir et généraliser la notion de densités à maximum d'entropie. L'approche permet de définir des densités sous forme paramétrique, densité de Gibbs à Maximum d'Entropie, dans des espaces très généraux et abstraits.

Références

[1] N. Le Bihan, F. Chatelain and J.H. Manton, *Isotropic Multiple Scattering Processes on Hyperspheres*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 62, num. 10, pp.5740-5752, 2016.

[2] Barbaresco, F.,
sl Koszul information geometry and Souriau Lie group thermodynamics, AIP Conf. Proc. n. 1641, n. 74, 2015, Proceedings of MaxEnt'14 conference, Amboise, Septembre 2014

[3] Barbaresco, F., *Koszul Information Geometry and Souriau Geometric Temperature/Capacity of Lie Group Thermodynamics*. Entropy, vol. 16, 2014, pp. 4521-4565. Published in the book Information, Entropy and Their Geometric Structures, MDPI Publisher, September 2015.

[4] Barbaresco, F., *Symplectic Structure of Information Geometry: Fisher Metric and Euler-Poincaré' Equation of Souriau Lie Group Thermodynamics*, In Geometric Science of Information, Second International Conference GSI 2015 Proceedings, (Franck Nielsen and Frédéric Barbaresco, editors), Lecture Notes in Computer Science vol. 9389, Springer 2015, pp. 529540.

[5] Barbaresco, F., *Geometric Theory of Heat from Souriau Lie Groups Thermodynamics and Koszul Hessian Geometry: Applications in Information Geometry for Exponential Families*. Preprint soumis au Special Issue Differential Geometrical Theory of Statistics, MDPI, Entropy, 2016.

[6] Koszul, J.L., *Sur la forme hermitienne canonique des espaces homognes complexes*. Can. J. Math. 1955, 7, 562576.

[7] Koszul, J.L., *Exposés sur les Espaces Homogènes Symétriques*, Publicaçao da Sociedade de Matematica de Sao Paulo: Sao Paulo, Brazil, 1959.

[8] Koszul, J.L., *Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affines*, Bull. Soc. Math. Fr. 1961, 89, 515533.

[9] Koszul, J.L., *Ouverts convexes homogènes des espaces affines*, Math. Z. 1962, 79, 254259.

[10] Koszul, J.L., *Variétés localement plates et convexité*. Osaka. J. Math. 1965, 2, 285290.

[11] Koszul, J.L., *Déformations des variétés localement plates*, Ann. Inst. Fourier 1968, 18, 103114.

[12] Koszul, J.L., *Trajectoires Convexes de Groupes Affines Unimodulaires*, In Essays on Topology and Related Topics; Springer: Berlin, Germany, 1970; pp. 105110.

[13] Souriau, J.M., *Géométrie de l'espace de phases*, Comm. Math. Phys. 1966, 374, 130

[14] Souriau, J.M., *Définition covariante des équilibres thermodynamiques*, Suppl. Nuov. Cimento 1966, 1, pp.203216. (In French)

[15] Souriau, J.M., *Structure des systèmes dynamiques*, Editions Jacques Gabay: Paris, France, 1970.

[16] Souriau, J.-M., *Mécanique statistique, groupes de Lie et cosmologie*, Colloques internationaux du CNRS numro 237, Géométrie symplectique et physique matématique, 1974, pp. 59113.

[17] Souriau, J.M., *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique*, Éditions du C.N.R.S.: Paris, France, 1975.

[18] Souriau, J.M., *Thermodynamique Relativiste des Fluides*, Centre de Physique Théorique: Marseille, France, 1977.

[19] Souriau, J.M., *Thermodynamique et géométrie*, In Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II; Bleuler, K., Reetz, A., Petry, H.R., Eds.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1978; pp. 369397.

[20] Souriau, J.M., *Dynamic Systems Structure (chap.16 convexité, chap. 17 Mesures, chap. 18 Etats statistiques, Chap. 19 Thermodynamique)*, available in Souriau archive (document sent by C. Valle), unpublished technical notes, 1980.

[21] Souriau, J.M., *Mécanique classique et géométrie symplectique*, CNRS Marseille. Cent. Phys. Théor. 1984, Report ref. CPT-84/PE-1695.

[22] Souriau, J.M., *On Geometric Mechanics*, Discret. Cont. Dyn. Syst. J. 2007, 19, 595607.

Frédéric BARBARESCO, Thales Air Systems, Voie Pierre-Gilles de Gennes, 91470 Limours.
frederic.barbaresco@thalesgroup.com