

# Contrôles bang-bang : la redondance amène de la robustesse

Antoine OLIVIER, Laboratoire Jacques-Louis Lions

**Emmanuel TRÉLAT**, Laboratoire Jacques-Louis Lions

**Thomas HABERKORN**, Laboratoire MAPMO d'Orléans

On s'intéresse au système de contrôle non linéaire en dimension finie

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)). \quad (1)$$

Dans de nombreux problèmes, on ne s'autorise que l'utilisation de contrôles bang-bang, c'est à dire de contrôles ne pouvant prendre que deux valeurs. Étant données une condition initiale  $x_0$  et une condition finale  $x_f$ , et en introduisant l'application entrée-sortie  $E(x_0, t_f, u) = x(t_f)$  où  $x(\cdot)$  est la solution de (1) avec la condition initiale  $x(0) = x_0$ , on cherche à trouver un contrôle bang-bang  $u$  tel que  $E(x_0, t_f, u) = x_f$ . Dans le cadre du contrôle optimal, les contrôles bang-bang apparaissent naturellement, par exemple lorsque l'on choisit un critère de minimisation du temps final, ou d'une norme  $L^1$ . En revanche, il est intéressant de noter que de tels contrôles, à cause de leur optimalité, sont en général peu robustes, et possèdent un nombre minimal de temps de commutations (Voir par exemple [1, 2] à ce sujet).

Une idée naturelle qui apparaît alors est d'ajouter des temps d'activations supplémentaires, qui peuvent être vus comme des degrés de liberté additionnels. À condition de préciser sa valeur initiale, un contrôle bang-bang est entièrement déterminé par ses temps d'activation  $\mathcal{T} = (t_1, \dots, t_N)$  (et sous réserve qu'il en possède un nombre fini). On montre qu'une variation  $\delta\mathcal{T} = (\delta t_1, \dots, \delta t_N)$  génère  $N$  vecteurs de variations  $(v_1(t_f), \dots, v_N(t_f))$  tels que

$$E(x_0, t_f, \mathcal{T} + \delta\mathcal{T}) = E(x_0, t_f, \mathcal{T}) + \delta t_1 \cdot v_1(t_f) + \dots + \delta t_N \cdot v_N(t_f) + o(\|\delta\mathcal{T}\|)$$

Le cône engendré par l'ensemble des vecteurs de variations  $v_i(t_f)$  forme alors une approximation de l'ensemble accessible. On remarque alors que plus il y a de temps de commutations, plus cette approximation est précise. On présentera une méthode consistant à ajouter des temps de commutations supplémentaires, afin de rendre les trajectoires plus robustes, c'est à dire à chercher des temps  $(s_1, \dots, s_l)$  additionnels tels que  $E(x_0, t_f, t_1, \dots, t_N, s_1, \dots, s_l) = x_f$ . On ajoute ces temps supplémentaires sous la forme de *variations aiguilles*, un concept introduit par Pontryagin dans [3] pour démontrer le principe du maximum.

En outre, nous montrerons que traiter un problème de contrôle en présence de perturbations revient alors à résoudre un système non linéaire sur-déterminé, que l'on peut approcher par une méthode de type moindres carrés. Cette approche nous permet également de mettre en évidence un critère permettant de quantifier la robustesse d'une trajectoire "bang-bang".

On s'attachera à illustrer cette méthode en l'appliquant au problème du contrôle de l'attitude d'un lanceur rigide.

## Références

- [1] A. J. KRENER, H. SCHÄTTLER, *The structure of small-time reachable sets in low dimensions*, Siam J. Control Optim., 1989.
- [2] I. KUPKA, *Geometric theory of extremals in optimal control problems*, Trans. Amer. Math. Soc., 1987.
- [3] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE, AND E. F. MISCHENKO, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc, 1962.

**Antoine OLIVIER**,

antoine.olivier@upmc.fr

**Emmanuel TRÉLAT**,

emmanuel.trelat@upmc.fr

**Thomas HABERKORN**,

thomas.haberkorn@univ-orleans.fr