

Problème de transmission en dynamique de population

Alexandre THOREL, Université du Havre Normandie

Mots-clés : semi-groupes analytiques, espaces d'interpolation, calcul fonctionnel.

On étudie un problème de transmission (P), en dynamique de population, posé dans un ouvert cylindrique Ω de la forme:

$$\Omega :=]a, b[\times \omega, \quad \text{avec} \quad \Omega := \Omega_- \cup \Gamma \cup \Omega_+,$$

où $\Omega_- :=]a, \gamma[\times \omega$, $\Gamma := \{\gamma\} \times \omega$ et $\Omega_+ :=]\gamma, b[\times \omega$ avec $\gamma \in]a, b[\subset \mathbb{R}$ et $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Dans chacun des habitats, on considère qu'une population se disperse selon une équation de diffusion généralisée modélisée par

$$k\Delta^2 u - l\Delta u = f,$$

où $k, l > 0$. Ici, le terme biharmonique modélise la dispersion induite par des interactions à longues portées alors que le laplacien ne modélise que la dispersion locale (voir J.D. Murray [4]).

Afin d'étudier (P), on utilise les techniques liées aux équations différentielles opérationnelles: sommes d'opérateurs linéaires, puissances fractionnaires d'opérateurs, théorie des semi-groupes et de l'interpolation (voir M. Haase [2]), G. Dore & A. Venni [1] et H. Triebel [5]).

Plus précisément, on traduit les équations de (P) en équations opérationnelles d'ordre 4, à valeurs dans l'espace de Banach $X := L^p(\omega)$, $p \in]1, +\infty[$.

En posant $(u(x))(y) := u(x, y)$ avec $x \in]a, b[$, $y \in \omega$ et Δ_y comme étant le laplacien en dimension $n-1$, on définit $Au(x) := \Delta_y u(x)$ et $D(A)$ le domaine de A qui dépend des conditions aux bords considérées. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} (EQ) & \begin{cases} u_-^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_-}{k_-} I)u_-''(x) + (A^2 - \frac{l_-}{k_-} A)u_-(x) = f_-(x), & \text{pour p. p. } x \in]a, \gamma[\\ u_+^{(4)}(x) + (2A - \frac{l_+}{k_+} I)u_+''(x) + (A^2 - \frac{l_+}{k_+} A)u_+(x) = f_+(x), & \text{pour p. p. } x \in]\gamma, b[\end{cases} \\ (CB) & \begin{cases} u_-(a) = \varphi_1^-, & u_+(b) = \varphi_1^+, \\ u'_-(a) = \varphi_2^-, & u'_+(b) = \varphi_2^+, \end{cases} \\ (CT) & \begin{cases} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u'_-(\gamma) = u'_+(\gamma) \\ k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A u'_+(\gamma) - l_+ u'_+(\gamma) = k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A u'_-(\gamma) - l_- u'_-(\gamma) \\ k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A u_+(\gamma) = k_- u_-''(\gamma) + k_- A u_-(\gamma). \end{cases} \end{aligned} \quad (P)$$

On utilise les résultats de [3], pour montrer que, sous de bonnes hypothèses sur les données du problème (P), on peut construire des solutions

$$u_- \in W^{4,p}(a, \gamma; X) \cap L^p(a, \gamma; D(A^2)) \quad \text{et} \quad u_+ \in W^{4,p}(\gamma, b; X) \cap L^p(\gamma, b; D(A^2))$$

de (P) vérifiant les conditions aux limites du problème (P). Enfin, on résout un déterminant opérationnel pour montrer que parmi les couples (u_-, u_+) précédents un seul vérifie les conditions de transmission, fournissant ainsi l'unique solution du problème (P) ayant la régularité attendue. Si A est un opérateur linéaire plus général, sous certaines hypothèses sur A , ce résultat reste vrai.

Références

- [1] G. DORE & A. VENNI, *On the Closedness of the Sum of Two Closed Operator*, Math. Z., 196, 1987, pp. 189-201.
- [2] M. HAASE, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Birkhauser, 2006.
- [3] R. LABBAS, S. MAINGOT, D. MANCEAU & A. THOREL, *On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 450, 2017, pp. 351-376.
- [4] J.D. MURRAY, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer, 2003.
- [5] H. TRIEBEL, *Interpolation theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland publishing company Amsterdam New York Oxford, 1978.