Analyse théorique et numérique de l'équation de Black-Scholes non linéaire

Aicha DRIOUCH, Université de Picardie Jules Verne, Université Cadi Ayyad

Olivier GOUBET, Université de Picardie Jules Verne

Hassan AL MOATASSIME, Université Cadi Ayyad

Dans un marché financier idéalisé, la valeur d'une option peut être déterminée par la théorie classique de Black-Scholes[1]. Ce modèle repose sur un nombre d'hypothèses qui s'avèrent trop restrictives dans la pratique. Par conséquent, plusieurs modèles non linéaires ont été proposés avec des hypothèses plus réalistes, telle que les coûts de transaction, qui peut avoir un impact sur le prix de l'actif, la volatilité, et le prix de l'option elle-même.
G.Barles, *H.Soner*[2] ont dérivé un modèle pour l'évaluation des options en présence des coûts de transaction, il s'agit d'une extension du modèle de Black-Scholes avec une volatilité modifiée donnée par

$$\tilde{\sigma}(S,t,V_{SS})^2 = \sigma^2\left(1+\Psi(e^{r(T-t)}a^2S^2V_{SS})\right).$$

où V est le prix de l'option, S est le prix de l'actif sous-jacent, T est la maturité de l'option, r est le taux d'intérêt sans risque, σ est la volatilité donnée dans le modèle de black-Scholes, a est un paramètre positif qui représente les coûts de transaction et Ψ est solution de l'EDO non linéaire

$$\begin{cases} \Psi'(x) &= \dfrac{\Psi(x)+1}{2\sqrt{x\Psi(x)}-x} \qquad x \neq 0 \\ \Psi(0) &= 0 \end{cases}$$

L'équation aux dérivées partielles non linéaire de Black-Scholes devient alors

$$V_t + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(S,t,V_{SS})^2S^2V_{SS} + rSV_S - rV = 0. \qquad S>0 \quad t\in(0,T) \tag{1}$$

L'équation (1) est complétée par la condition terminale et les conditions aux bords suivantes

$$\begin{aligned} V(S,T) &= \max(0,S-K) && 0\le S<\infty \\ V(S,t) &\sim S && S\to\infty \\ V(0,t) &= 0 && 0\le t\le T \end{aligned}$$

Avec K est le prix d'exercice.
Dans ce travail nous étudions théoriquement l'équation (1) à l'aide d'une méthode proposée dans [3]. Nous allons également simuler numériquement cette équation avec un schéma de différences finies et enfin appliquer la méthode des multi-grilles [4] afin d'accélérer la convergence du schéma numérique.

Références

[1] F.Black, M.Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Polit. Econ.,81, *637-54*, 1973.

[2] G.Barles, H.Soner,*Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation*, Finance Stoch., 1998.

[3] C. Bauzet, G. Vallet, *On abstract Barenblatt equations*,Differential Equations and Applications Vol 3,Number 4 (2011), *487-502*.

[4] A. Brandt, *Multi-level adaptive solutions to boundary value problems*,Math.comp., *31:333-390* (1977).

Aicha DRIOUCH, LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, 33 rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex 1
aicha.driouch@etud.u-picardie.fr