Mini-symposium IMAGE1
Traitement mathématique des images (partie 1)

Mini-symposium porté par le GdR CNRS 2286 Mathématiques de l'Imagerie et de ses Applications

Résumé

Le traitement mathématique des images est une discipline en plein essor. Les outils mathématiques utilisés incluent par exemple les méthodes varationnelles, l'analyse, les EDP, les méthodes statistiques, l'optimisation non lisse, la géométrie de l'information. L'explosion de la taille des images et l'acquisition généralisée de donnée multi-modales dans de nombreux domaines d'applications appelle à encore plus de modélisation mathématique. L'enjeu du double mini-symposium IMAGE sera d'une part de présenter les outils mathématiques actuels développés dans le domaine, et d'autre part de montrer comment ces outils permettent de résoudre des problèmes appliqués concrets en traitement d'image. Cette première session est consacrée aux approches variationnelles et à l'optimisation pour le traitement et la restauration d'images.

Organisateur(s)

1. **Jean-François Aujol**, IMB, Université de Bordeaux.
2. **Hermine Biermé**, LMA, Université de Poitiers.
3. **Julie Delon**, MAP5, Université Paris Descartes.

Liste des orateurs

1. **Rémy Abergel**, LTCI, Telecom ParisTech
   Titre : The Shannon total variation.
2. **Fabien Pierre**, Technische Universität Kaiserslauter
   Titre : Diffusion de la chroma par modèle variationnel.
3. **Emmanuel Soubies**, Biomedical Imaging Group, EPFL
   Titre : Vers une vue unifiée des relaxations continues exactes du critère ℓ_2-ℓ_0 : application à la microscopie PALM/STORM.
4. **Camille Sutour**, MAP5, Université Paris Descartes
   Titre : Réduction du biais dans les méthodes variationnelles.

Jean-François Aujol, Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université de Bordeaux, jean-francois.aujol@math.u-bordeaux.fr
Hermine Biermé, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Poitiers, hermine.bierme@math.univ-poitiers.fr
Julie Delon, Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes, julie.delon@parisdescartes.fr
Rémy Abergel, LTCI, Telecom ParisTech, remy.abergel@telecom-paristech.fr
Fabien Pierre, Technische Universität Kaiserslauter, fabien.pierre@math.u-bordeaux.fr
Emmanuel Soubies, Biomedical Imaging Group, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, emmanuel.soubies@epfl.ch
Camille Sutour, Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes, camille.sutour@parisdescartes.fr

Introduction

Le mini-symposium IMAGE est composé de 2 sessions IMAGE1 et IMAGE2. La première partie est consacrée aux approches variationnelles et à l'optimisation pour le traitement et la restauration d'images. La deuxième partie est dédiée à des questions d'analyse d'image.

- Partie 1 : amélioration et restauration d'images (IMAGE1)
    1. Rémy Abergel (LTCI, Telecom ParisTech) : *The Shannon total variation*
    2. Fabien Pierre (Technische Universität Kaiserslauter) : *Diffusion de la chroma par modèle variationnel.*
    3. Emmanuel Soubies (Biomedical Imaging Group, EPFL) : *Vers une vue unifiée des relaxations continues exactes du critère ℓ_2-ℓ_0 : application à la microscopie PALM/STORM*
    4. Camille Sutour (MAP5, Université Paris Descartes) : *Réduction du biais dans les méthodes variationnelles*
- Partie 2 : analyse d'images (IMAGE2)
    1. Denis Fortun (Biomedical Imaging Group, EPFL) : *Estimation affine par morceaux rapide du flot optique sans segmentation*
    2. Barbara Gris (Royal Institute of Technologie, Stockholm) : *Diffeomorphic deformations to study shapes : a modular method*
    3. Lara Raad (CMLA, ENS Cachan) : *Texture synthesis using local Gaussian patch models*
    4. Pauline Tan (DOTA, ONERA) : *Méthodes de descentes alternées accélérées pour les problèmes de type Dykstra*

1 The Shannon total variation

Auteurs : <u>Rémy Abergel</u> (LTCI, Télécom ParisTech), **Lionel Moisan** (MAP5, Univ. Paris Descartes)

In image processing problems, the minimization of total variation (TV) based energies requires discretization schemes, such as the commonly used finite differences approach. Unfortunately, such schemes generally lead to images which are difficult to interpolate, which strongly restrict their potential use in image analysis algorithms requiring sub-pixel precision. This issue can be avoided by using the "Shannon" total variation (STV), a discretization that is inherently compatible with Shannon interpolation. We will explain how the STV regularization can be efficiently handled with modern primal-dual algorithms, and present several applications (image denoising, deblurring, spectrum extrapolation) where the improved behavior of the Shannon total variation yields images with better sub-pixel accuracy. We will also present a new STV-regularized optimization problem involving a data-fidelity term formulated in the frequency domain, which can be used to remove aliasing from an image, or given an image which is difficult to interpolate, can produce a visually similar image which can be easily interpolated.

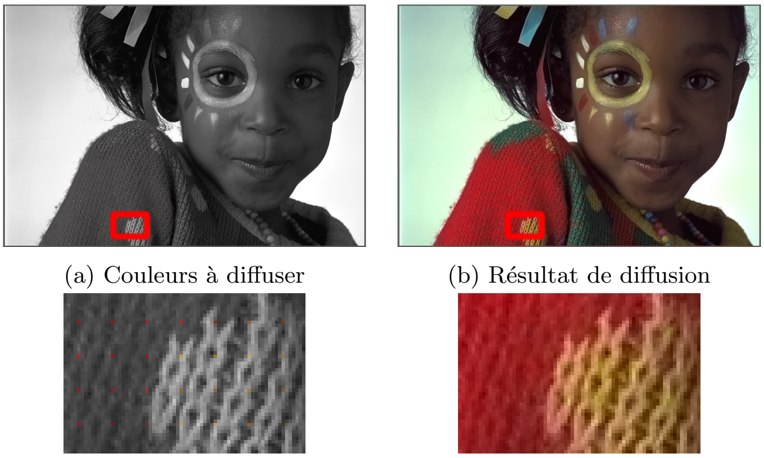
2 Diffusion de la chroma par modèle variationnel

Auteurs : <u>Fabien Pierre</u> (Technische Universität Kaiserslauter), **Jean-François Aujol** (IMB, Univ. Bordeaux), **Nicolas Papadakis** (CNRS, IMB, Univ. Bordeaux)

La diffusion de la couleur sur une image en niveaux de gris est une opération nécessaire pour la colorisation d'image. Cela peut également fournir un outil pour améliorer le taux de compression des images couleur en décomposant l'image en un canal de luma (niveaux de gris) et deux canaux de chroma (complémentaire du niveau de gris). Pour la diffusion, des méthodes ont été proposées depuis longtemps dans la littérature, notamment dans [3]. Dernièrement, des méthodes variationnelles ont été conçues par [5] et très récemment, des méthodes par EDP [4] utilisant le tenseur de structure de Di Zenzo.

Pour cette application, l'approche variationnelle souffre de deux problèmes que nous avons identifiés : d'une part, il faut établir les bornes de l'espace de chroma afin de garantir que la couleur finale soit affichable. D'autre part, un biais propre aux méthodes variationnelles apparaît et cela produit des images ternes. Dans cet exposé, nous proposerons de résoudre le premier problème par une étude géométrique

de l'espace RGB. La réduction du biais sera résolue par une généralisation de l'approche de [2] à des problèmes contraints.
Les résultats numériques sur des problèmes de diffusion de couleurs sont prometteurs comme le montre la Figure 1.



(a) Couleurs à diffuser (b) Résultat de diffusion

(c) Zoom sur (a) (d) Zoom sur (b)

FIGURE 1 – Illustration du problème de diffusion. Des points de couleurs sont disposés sur une grille régulière. Cette couleur est ensuite interpolée en tenant compte du niveau de gris.

3 Vers une vue unifiée des relaxations continues exactes du critère ℓ_2-ℓ_0 : application à la microscopie PALM/STORM

Auteurs : **Emmanuel Soubies** (Biomedical Imaging Group, EPFL), **Laure BLANC-FÉRAUD** (I3S, CNRS, Université Côte d'Azur), **Gilles Aubert**, (JAD, CNRS, Université Côte d'Azur)

Dans cet exposé, nous nous intéresserons à la minimisation des moindres carrés pénalisés en nome-ℓ_0 :

$$\hat{\mathrm{x}} \in \arg\min_{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\|\mathrm{Ax}-\mathrm{y}\|_2^2 + \lambda\|\mathrm{x}\|_0, \tag{1}$$

où la pseudo norme-ℓ_0 dénombre les composantes non nulles de x. De nombreuses applications en traitement du signal et des images requièrent la résolution d'un problème inverse pouvant se formaliser par la minimisation de cette fonctionnelle dite ℓ_2-ℓ_0. C'est le cas par exemple des problèmes de déconvolution d'impulsions, de séparation de sources ou encore de super-résolution en microscopie. Après une briève revue de la vaste littérature s'intéressant à ce problème NP-Difficile, nous nous focaliserons plus particulièrement sur les relaxations *continues* de cette fonctionnelle où le terne ℓ_0 est remplacé par une pénalité de la forme $\Phi(\mathrm{x}) := \sum_i \phi_i(\mathrm{x}_i)$. Dans ce contexte, se pose la question de la consistance entre les minimiseurs des fonctionnelles initiale et relaxée. Nous répondrons à cette question en mettant en évidence cinq conditions sur Φ *nécessaires et suffisantes* pour que les deux propriétés suivantes soient vérifiées quelles que soient les données y :

- tout minimiseur (local et global) de la fonctionnelle relaxée est un minimiseur de ℓ_2-ℓ_0 ;
- les deux fonctionnelles admettent les mêmes minimiseurs globaux.

Notons par ailleurs que ces relaxations éliminent généralement des minimiseurs locaux (non globaux) de ℓ_2-ℓ_0 ce qui est une propriété intéréssante dans un tel contexte d'optimisation non-convexe. Nous définissons ainsi une classe de pénalités conduisant à des relaxations du critère initial que nous qualifions d'*exactes* de part les propriétés susmentionnées. Il est alors possible de bénéficier, grâce à la *continuité* de ces fonctionnelles relaxées, des dernières avancées dans le domaine de l'optimisation non-convexe afin d'aborder (indirectement) le problème (1). Par ailleurs, les conditions établies sur Φ offrent de nouveaux critères permettant de comparer les nombreuses pénalités continues proposées dans la littérature pour approcher la norme ℓ_0. Nous identifierons les paramètres de certaines d'entre elles permettant d'obtenir une relaxation exacte de ℓ_2-ℓ_0. En particulier, nous verrons que la pénalité CEL0 (Continuous Exact ℓ_0) est celle qui potentiellement élimine le plus de minimiseurs locaux du critère initial et qu'elle correspond à la limite inférieure de la classe de pénalités précédemment définie. Nous terminerons cette présentation par une application à la localisation de molécules en microscopie de super-résolution PALM/STORM [1].

Références : [1], [6], [7]

4 Réduction du biais dans les méthodes variationnelles

Auteurs : **Camille Sutour** (MAP5, Univ. Paris Descartes), **Julian Rasch** (Univ. of Münster), **Eva-Maria Brinkmann** (Univ. of Münster), **Martin Burger** (Univ. of Münster)

Les méthodes variationnelles souffrent d'un biais systématique. L'exemple le plus répandu est celui de la régularisation ℓ_1, qui produit des solutions sparses, mais dont les valeurs quantitatives sont atténuées. Nous proposons une méthode en deux étapes afin de réduire ce biais. Après la résolution du problème variationnel standard, l'idée est d'effectuer une seconde étape de debiasing en minimisant le terme d'attache aux données sous contrainte liée à un sous-espace approprié. Nous définissons ici ce sous-espace à l'aide des distances de Bregman, via le sous-gradient issu de la résolution du premier problème. Cela conduit en particulier à la décomposition du biais en deux parties, le biais lié au modèle (model bias) et le biais lié à la méthode (method bias), que nous corrigeons ici. De nombreux exemples et illustrations illustrent la performance et le comportement statistique de la méthode.

Références

[1] Simon Gazagnes, Emmanuel Soubies and Laure Blanc-Féraud, *High density molecule localization for super-resolution microscopy using CEL0 based sparse approximation*, Proc ISBI, 2017.

[2] Charles-Alban Deledalle, Nicolas Papadakis, Joseph Salmon and Samuel Vaiter, *CLEAR : Covariant LEAst-square Re-fitting with applications to image restoration*, SIAM Journal on Imaging Sciences, 2017.

[3] Anat Levin, Dani Lischinski, and Yair Weiss, *Colorization using optimization*, ACM Transactions on Graphics, vol. 23, 2004, pp. 689–694.

[4] Pascal Peter, Lilli Kaufhold, and Joachim Weickert, *Turning diffusion-based image colorization into efficient color compression*, IEEE Transactions on Image Processing, 2016.

[5] Fabien Pierre, Jean-François Aujol, Aurélie Bugeau, Nicolas Papadakis, and Vinh-Thong Ta, *Luminance-chrominance model for image colorization*, SIAM Journal on Imaging Sciences 8(1), 2015, 536–563.

[6] Emmanuel Soubies, Laure Blanc-Féraud and Gilles Aubert, *A continuous exact ℓ_0 penalty (CEL0) for least squares regularized problem*, SIAM Journal on Imaging Sciences, 2015, 8-3.

[7] Emmanuel Soubies, Laure Blanc-Féraud and Gilles Aubert, *A unified view of exact continuous penalties for ℓ_2-ℓ_0 minimization*, Soumis, 2016.

1. Photo Activation Localisation Microscopy / STochastic Optical Reconstruction Microscopy