Mini-symposium CONTROL
Nouvelles approches analytiques et géométriques en optimisation et en contrôle optimal

Les organisateurs et participants du mini-symposium CONTROL remercient la composante MODE de la SMAI pour son aide financière.

Résumé

Ce mini-symposium a pour objectif de donner un aperçu des travaux récents proposant de nouvelles approches pour résoudre des problèmes de contrôle optimal et d'optimisation. Dans le cadre du contrôle optimal, on s'intéressera à la discrétisation de problèmes stochastiques ainsi qu'à de nouvelles méthodes permettant de garantir une bonne approximation numérique des solutions approchées. On verra ensuite comment les outils du contrôle géométrique peuvent être utilisés pour synthétiser des lois de commandes par retour d'état pour des systèmes issus des bioprocédés. Enfin, on étudiera comment la dualité convexe permet de montrer l'existence et l'unicité de solutions de problèmes de jeux à champs moyen.
Le mini-symposium se propose donc de mettre l'accent sur le développement de techniques récentes en optimisation pour étudier la discrétisation de problèmes de contrôle optimal stochastique, la synthèse de lois de commande par retour d'état, et des questions d'existence et d'unicité dans la théorie de jeux à champs moyens.

Organisateur(s)

1. **Oana-Silvia Serea**, Université de Perpignan.
2. **Térence Bayen**, Université de Montpellier.

Liste des orateurs

1. **Térence Bayen**, Université de Montpellier
   Titre : Contrôle optimal d'un bioréacteur : étude statique et dynamique.
2. **Francisco Silva**, Université de Limoges
   Titre : On the convergence of discrete optimal control.
3. **Charles Bertucci**, Université Paris-Dauphine
   Titre : Problème d'arrêt optimal pour les jeux à champ moyen.

Oana-Silvia Serea, Univ. Perpignan Via Domitia, LAboratoire de Mathématique et PhySique, EA 4217, F-66860 Perpignan, France, oana-silvia.serea@univ-perp.fr
Térence Bayen, University of Montpellier (Laboratoire IMAG) Place Eugene Bataillon, 34095 Montpellier, France , tbayen@math.univ-montp2.fr
Térence Bayen, University of Montpellier (Laboratoire IMAG) Place Eugene Bataillon, 34095 Montpellier, France, tbayen@math.univ-montp2.fr
Francisco Silva, XLIM-DMI, Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87000, Limoges, France, francisco.silva@unilim.fr
Charles Bertucci, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris, France, bertucci@ceremade.dauphine.fr

1 Contrôle optimal d'un bioréacteur : étude statique et dynamique

T. Bayen

Dans cet exposé, on étudie l'optimisation d'un système en dimension 4 et qui modélise un bioréacteur adapté à la production de bio-gaz. Un tel processus est modélisé par un système ressource-consommateur de type "chemostat" :

$$\left\{\begin{array}{ll}\dot{X}_1 & = \mu_1(S_1)X_1 - u(t)x_1,\\ \dot{S}_1 & = -k_1\mu_1(S_1)X_1 + u(t)(S_{in}^1 - S_1),\\ \dot{X}_2 & = \mu_2(S_2)X_2 - u(t)X_2,\\ \dot{S}_2 & = -k_2\mu_2(S_2)X_2 + k_3\mu_1(S_1)X_1 + u(t)(S_{in}^2 - S_2).\end{array}\right. \tag{1}$$

La variable X_i, $i = 1, 2$ représente la concentration en micro-organismes de l'espèce i. Chacune de ces deux espèces croît sur un substrat i de concentration S_i, $i = 1, 2$. Les paramètres S_{in}^1 et S_{in}^2 désignent les concentrations en substrat entrant, et les paramètres k_i, $i = 1, 2, 3$ sont positifs et sont des coefficients stoechiométriques. Les fonctions μ_i sont positives et désignent les fonctions de croissances des deux espèces. Enfin, u désigne le taux de dilution. L'objectif de ce travail est de synthétiser des lois de commandes $t \mapsto u(t)$ (si possible par retour d'état) qui maximisent la production de bio-gaz sur un intervalle de temps :

$$\max_{u(\cdot)} \int_0^T \mu_2(S_2(t))X_2(t)dt.$$

On s'intéresse d'abord au cas où le contrôle $u(\cdot)$ est constant et le système (1) est à l'équilibre. Ceci conduit à étudier un problème d'optimisation sous contraintes (définies entres autres par $\dot{X}_i = \dot{S}_i = 0$). La solution de ce problème $(X_1^*, S_1^*, X_2^*, S_2^*)$ se trouve alors sur la variété attractive invariante du système (1). Aussi, on restreint par la suite le système (1) à celle-ci. Ceci conduit au système de contrôle suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll}\dot{s}_1 & = (-\mu_1(s_1) + u(t))(s_{in}^1 - s_1),\\ \dot{s}_2 & = (-\mu_2(s_2) + u(t))(s_{in}^2 - s_2) + (\mu_1(s_1) - \mu_2(s_2))(s_{in}^1 - s_1),\end{array}\right. \tag{2}$$

qui correspond donc à une réduction de (1) à la variété attractive invariante. Afin que le système puisse se comporter au point de production maximal $(X_1^*, S_1^*, X_2^*, S_2^*)$, on est donc amené à étudier le problème de temps minimal

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^{T_u} dt \quad \text{t.q. } (s_1(T_u), s_2(T_u)) = (S_1^*, S_2^*). \tag{3}$$

On cherche donc à conduire en temps minimal le système depuis une condition initiale quelconque vers le point qui maximise la production de bio-gaz à l'équilibre. L'originalité du problème (3) provient du fait que la cible se trouve sur la courbe de colinéarité Δ_0 pour le système (2). Grâce au principe de Pontryagin et au contrôle géométrique, nous mettons en place une loi de commande optimale de type feedback pour conduire (2) à la cible en temps minimal depuis n'importe quelle condition initiale. Nous mettons en évidence l'existence d'arcs singuliers qui intersectent la courbe de colinéarité, et donc il existe des points singuliers stationnaires (i.e. des équilibres de (2) restreint à la variété singulière). Dans le papier [1], nous avons étudié un problème de temps minimal analogue lorsque la cible n'est pas sur Δ_0. Lorsque celle-ci est sur Δ_0, l'exclusion d'extrémales non-optimales est plus délicates car les trajectoires peuvent franchir cette courbe.

Références

[1] T. Bayen, A. Rapaport, M. Sebbah, *Minimal time of the two tanks gradostat model under a cascade inputs constraint*, SIAM J. Optim. Control, Vol. 52(4), pp. 2568-2594, 2014.

2 On the convergence of discrete optimal controls

F. Silva

In this talk we survey some classical and new results regarding the discretization of stochastic optimal control problems. We focus our attention on time-discrete approximations recalling first some classical convergence result for the value function which can be proved by using analytic or probabilistic arguments. Next we discuss the more delicate issue of the convergence of the optimizers as well as an algorithm for the time-discrete problem.

Références

[1] J.-F. Bonnans, J. Gianatti and F.-J. Silva, *On the time discretization of stochastic optimal control problems : the dynamic programming approach*, Preprint, 2017.

3 Problème d'arrêt optimal pour les jeux à champ moyen

C. Bertucci

Les problèmes de jeux à champ moyen ont été très étudiés depuis leur introduction en 2007 par Lasry et Lions. Nous allons ici étudier l'analogue de ces problèmes lorsque chaque agent fait face à un problème d'arrêt optimal. Le système d'EDP à étudier devient alors le couplage entre un problème de l'obstacle (une inéquation variationnelle) pour la fonction valeur du jeu et son équation linéarisée qui est elle aussi une inéquation variationnelle, pour la densité des joueurs. Nous présenterons des résultats d'existence et d'unicité pour de tels systèmes ainsi que l'interprétation en terme de théorie des jeux que l'on peut donner à de telles solutions.