

Mini-symposium MULTIKIN
Méthodes numériques pour les équations cinétiques et
problèmes multi-échelles

Résumé

Les équations cinétiques mettent souvent en jeu des phénomènes physiques se déroulant à des échelles de temps et d'espace très différentes (dans les régimes fortement collisionnels, les régimes quasi-neutre ou faible rapport de masse en physique des plasmas). Pour résoudre numériquement ces équations de manière efficace, des méthodes numériques multi-échelles telles que celles de type micro-macro ou de type AP (préservant l'asymptotique) sont spécifiquement développées.

Organisateur(s)

1. **Michel Mehrenberger**, IRMA ; Univ. Strasbourg & INRIA Tonus.
2. **Laurent Navoret**, IRMA ; Univ. Strasbourg & INRIA Tonus.

Liste des orateurs

1. **Mehdi Badsì**, Université de Toulouse ; UPS, INSA, UT1, UTM, Institut de Mathématiques de Toulouse, CNRS
Titre : Gaine cinétique : théorie et numérique.
2. **Anaïs Crestetto**, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray ; Université de Nantes
Titre : Une décomposition micro-macro particulière pour des équations de type Boltzmann-BGK en régime de diffusion.
3. **Sébastien Guisset**, Laboratoire de Mathématiques de Versailles ; UVSQ
Titre : Un schéma HLL modifié pour le modèle M1 électronique en limite de diffusion.
4. **Maxime Herda**, ICJ, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 Boulevard du 11 novembre 1918, 69622, Villeurbanne
Titre : Modèles hydrodynamiques pour les électrons sans masse.

Michel Mehrenberger, IRMA, Université de Strasbourg, 7 rue Descartes, Strasbourg, France, mehrenbe@math.unistra.fr

Laurent Navoret, IRMA, Université de Strasbourg, 7 rue Descartes, Strasbourg, France, laurent.navoret@math.unistra.fr

Mehdi Badsì, Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219, F-31062 Toulouse, France, Mehdi.Badsì@math.univ-toulouse.fr

Anaïs Crestetto, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, CNRS UMR 6629, Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes, France, Anaïs.Crestetto@univ-nantes.fr

Sébastien Guisset, Laboratoire de Mathématiques UVSQ bâtiment Fermat, 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles cedex, France, sebastien.guisset@uvsq.fr

Maxime Herda, ICJ, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 Boulevard du 11 novembre 1918, 69622, Villeurbanne, herda@math.univ-lyon1.fr

Introduction

Les équations cinétiques peuvent modéliser des phénomènes physiques se déroulant à des échelles de temps et d'espace très différentes. Ceci est particulièrement vrai en ce qui concerne la physique des plasmas. Ces gaz d'ions et électrons interviennent dans les dispositifs de fusion (tokamak, laser) et les champs électro-magnétique auto-induits ou appliqués génèrent de nombreuses échelles d'interactions.

Les simulations numériques sont par ailleurs très coûteuses car les équations cinétiques portent sur des fonctions de distribution dans l'espace des phases (position, vitesse). Il est donc indispensable de mettre en place des stratégies de type multi-échelles pour capturer les dynamiques à grande échelle sans être contraint par la résolution des échelles fines. Cela nécessite à la fois d'établir des modèles asymptotiques et de développer des méthodes numériques adaptées.

L'objet de ce mini-symposium est de présenter quelques-unes des méthodes autour des trois problématiques suivantes :

Le régime quasi-neutre Le plasma est dit quasi-neutre lorsque l'échelle des déséquilibres de charge est très petite par rapport à l'échelle d'observation. Cette quasi-neutralité n'est cependant plus valide près des parois. C'est le phénomène de gaine de Debye que présentera M. Badsì.

Le régime fortement collisionnel Il s'agit de méthodes permettant de capturer la dynamique fluide du plasma lorsque la fréquence des collisions entre particules devient importante. Une première stratégie, présentée par A. Crestetto, s'appuie sur une décomposition micro-macro : la fonction de distribution est écrite comme la somme d'une distribution fluide (à l'équilibre thermodynamique) et d'une distribution cinétique corrective. Une seconde stratégie, présentée par S. Guisset, s'appuie sur un modèle au moment angulaire, modèle intermédiaire entre le modèle cinétique et le modèle fluide.

Asymptotique faible rapport de masse Comme les électrons ont une masse bien plus faible que celle des ions, les échelles de résolution numérique sont fortement contraintes par la dynamique électronique. Dans le but de s'affranchir de ces contraintes, M. Herda présentera la dérivation de modèles dans l'asymptotique faible rapport de masse (dans le régime fortement collisionnel).

1 Gaine cinétique : théorie et numérique (Mehdi Badsì)

Lorsqu'un plasma électrostatique est en contact avec une paroi absorbante, il se forme près de la paroi une couche limite qu'on appelle la gaine de Debye. La gaine est caractérisée par la présence d'un champ électrique significatif et d'une charge d'espace. Nous présentons un modèle stationnaire de type Vlasov-Poisson à deux espèces avec des conditions aux limites, capable de reproduire la gaine. Nous développons les idées qui permettent d'aboutir à l'approximation numérique des solutions du modèle à l'aide d'un algorithme de gradient projeté. Puis, nous illustrons le phénomène de gaine à l'aide de nos simulations numériques. Enfin, nous donnons quelques résultats de simulations numériques lorsqu'un léger champ magnétique (tangent à la paroi) est imposé. Ces nouveaux résultats font apparaître des restrictions sur les paramètres du modèle qui en outre imposent une borne supérieure sur l'intensité du champ magnétique.

2 Une décomposition micro-macro particulière pour des équations de type Boltzmann-BGK en régime de diffusion (Anaïs Crestetto)

Dans cet exposé, je vous présenterai un nouveau schéma préservant l'asymptotique pour des équations cinétiques de type Boltzmann-BGK en régime de diffusion. Celui-ci est basé sur une décomposition micro-macro, dont la partie micro est résolue par une méthode particulière. Le choix de cette approximation particulière est motivé par un coût fortement réduit lorsque le système s'approche de la limite diffusive. Cependant, cette approximation impose un splitting entre la partie transport et la partie collisionnelle, et empêche a priori ces deux termes raides de se compenser et d'obtenir une stabilité uniforme. Nous proposons alors une reformulation adéquate et sans termes raides du système micro-macro. Le schéma sera détaillé et illustré par plusieurs résultats numériques. Ce travail, en collaboration avec Nicolas Crouseilles

et Mohammed Lemou, a également été étendu à l'ordre 2 en temps, ainsi qu'à des équations de type Vlasov-Poisson-BGK (avec champ dans la direction des vitesses).

3 Un schéma HLL modifié pour le modèle M1 électronique en limite de diffusion **(Sébastien Guisset)**

Dans ce travail un schéma préservant l'asymptotique est proposé pour le modèle M_1 électronique pour la limite de diffusion. Une modification de la viscosité numérique du schéma HLL est considérée dans le but de capturer la limite asymptotique en limite de diffusion. Cette altération est aussi effectuée tout en préservant l'admissibilité de la solution numérique sous une condition CFL acceptable. Il est montré que le nouveau schéma peut être interprété comme un solveur de Riemann approché et différents cas tests numériques sont présentés.

4 Modèles hydrodynamiques pour les électrons sans masse **(Maxime Herda)**

La dynamique des particules chargées dans un plasma ou un semi-conducteur peut être décrite à l'échelle cinétique par les équations de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck (VPFP). Dans ce modèle, les effets électromagnétiques et collisionnels ont lieu à des échelles de temps, d'espace et de vitesse différentes qui dépendent des paramètres physiques. Cela conduit à une dynamique multi-échelle complexe. En particulier le faible rapport de masse ε entre électrons et particules lourdes engendre des oscillations rapides des électrons autour du champ magnétique.

Dans cet exposé, nous discuterons de la justification rigoureuse de deux modèles asymptotiques dans la limite de faible masse électronique ($\varepsilon \rightarrow 0$) pour VPFP. En fonction de l'intensité des collisions, nous obtiendrons un modèle hydrodynamique parabolique [1] ou hyperbolique [2] sur les quantités macroscopiques. Ces modèles incluent plusieurs aspects de la dynamique centre-guide et de l'équilibre de Maxwell-Boltzmann-Gibbs. Concernant le passage à la limite, nos techniques d'analyse seront principalement basées sur des estimations d'énergie libre (ou entropie relative), l'utilisation de solutions renormalisées de DiPerna-Lions et de lemmes de moyenne. Enfin, grâce aux propriétés d'hypocoercivité de VPFP, nous pourrons dans certains cas établir des taux de convergence vers les modèles asymptotiques.

Références

- [1] M. HERDA, *On massless electron limit for a multispecies kinetic system with external magnetic field*, J. Differential Equations, 2016..
- [2] M. HERDA AND L. M. RODRIGUES, *Anisotropic Boltzmann-Gibbs dynamics of strongly magnetized Vlasov-Fokker-Planck equations*, submitted.